

R

<36617039300015

S

<36617039300015

Bayer. Staatsbibliothek

Math Un 198

-1

Mathesis. Systemata et methodi ord: chronol: 147:

Math

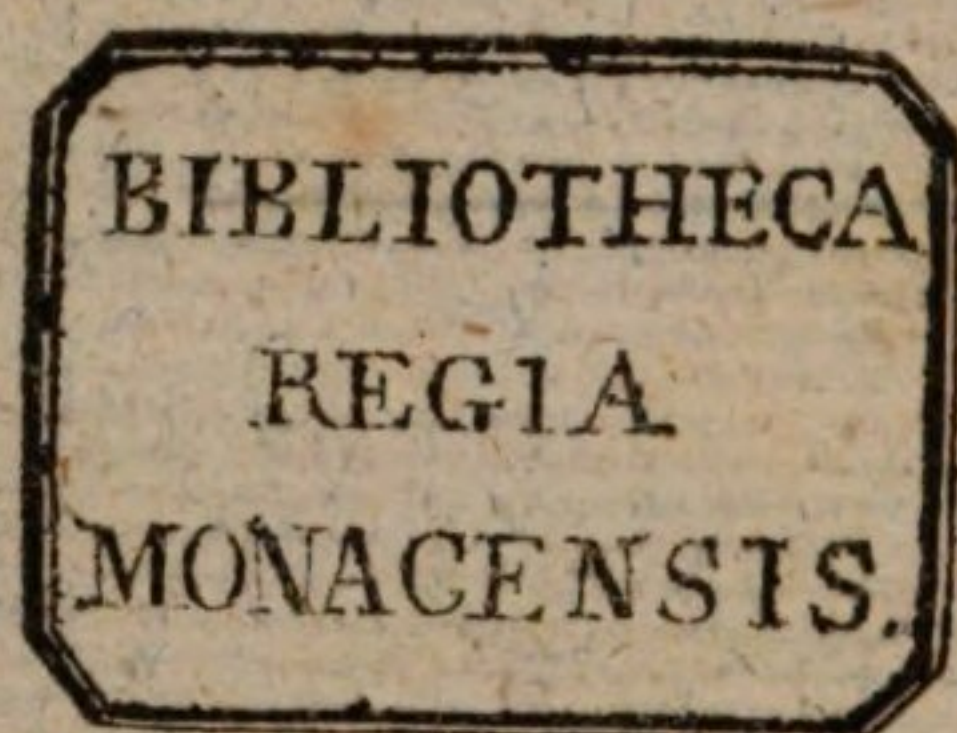
R

Anfangsgründe
der
Mathematik,

von
Gerhard Ulrich Anton Vieth.

Erster Theil,
Arithmetik und Geometrie.

Leipzig,
bey Johann Ambrosius Barth. 1796.



V o r r e d e.

Diese Anfangsgründe sollen meiner Absicht nach den *zweyten mathematischen Cursus* ausmachen, um Jünglingen von reiferem Alter nach Anleitung desselben einen gründlichen Unterricht in der Grössenlehre zu geben. Der zweyte Theil,

welcher die angewandte Mathematik
enthält, wird nebst einem kleinern
Lehrbuche zum Behuf des *ersten*
Cursus für die ersten Anfänger
nächstens nachfolgen.

V.

Dessau,
im September 1795.

Inhalt.

Einleitung. Begriff, Eintheilung, Lehrart
und Nutzen der Mathematik §. 1 bis 19

I. *Arithmetik.*

A. Von den Zahlen an sich

1. Erklärung und Bezeichnung der-
selben — 1 — 18

2. Veränderungen derselben

a. Gemeine Rechnungsarten

1. In Ziffern

a. Ganze und Decimal-
brüche — 19 — 46

b. Andere Brüche — 47 — 85

2. In Buchstaben — 86 — 100

b. Rechnung mit Potenzen

1. Im Allgemeinen — 101 — 119

2. Insbesondere von Auszie-
hung der Wurzeln

a. Quadratwurzel — 120 — 136

b. Cubikwurzel — 137 — 150

B. Von den Zahlen in Verhältniss mit einander

1. Von den Proportionen

a. Arithmetische Proportion — 151 — 161

I n h a l t.

b. Geometrische Proportion	§. 162 bis 197
2. Von den Progressionen	
a. Arithmetische Progression	— 198 — 210
b. Geometrische Progression nebst Logarithmen	— 211 — 252

II. Geometrie.

A. Lehren von ausgedehnten Grössen ohne Zuziehung der Arithmetik

A. Von Figuren, die in einer Ebene liegen. Ebene Geometrie.

Grundbegriffe derselben — 1 — 26

1. Von geradlinichten ebenen Figuren

a. In Rücksicht auf Gleich- heit und Deckung

1. Deckung der Drey-
ecke und Lage der
Linien — 27 — 84

2. Vergleichung des
Flächenraums — 85 — 110

b. In Rücksicht auf Ver- hältniss und Ähnlichkeit

1. Bey Dreyecken und
Parallelogrammen — 111 — 130

2. Bey andern Figu-
ren — 131 — 142

2. Vom Kreise.

a. In Rücksicht auf Gleich- heit und Deckung

I n h a l t.

1. Gerade Linien und
Winkel im Kreise §. 143 bis 180
2. Flächenraum - — 181 — 186
- b. In Rücksicht auf Ver-
hältniss und Ähnlichkeit
 1. Bogen, Winkel, Um-
fang - — 187 — 193
 2. Flächenraum • — 194 — 196
 3. Sehnen • — 197 — 209
- B. Von Figuren, die nicht in ei-
ner Ebene liegen. *Stereometrie.*
Grundbegriffe derselben — 210 — 230
 1. Von körperlichen Figuren,
die von geradlinichten ebe-
nen Figuren begrenzt wer-
den,
 - a. In Rücksicht auf Gleich-
heit und Deckung
 1. Lage der Linien
und Ebenen — 231 — 252
 2. Prismen und Py-
ramiden - — 253 — 278
 - b. In Rücksicht auf Ver-
hältniss und Ähnlich-
keit - — 279 — 291
 2. Von körperlichen Figuren,
die nicht bloss von ebenen
geradlinichten Figuren be-
gränzt werden,
 - a. In Rücksicht auf Gleich-
heit und Deckung

I n h a l t.

1. Cylinder und Kegel - S. 292 bis 309
2. Kugel - — 310 — 331
- b. In Rücksicht auf Verhältniss und Ähnlichkeit - — 332 — 336
- A. Lehren von ausgedehnten Grössen mit Zuziehung der Arithmetik
 - A. Von Berechnung der ausgedehnten Grössen überhaupt - — 337 — 371
 - B. Von Berechnung der Dreyecke insbesondere

Trigonometrie.

1. Ebene Trigonometrie.

- a. Grundbegriffe und Berechnung der trigonometrischen Hüllslinien — 372 — 407
- b. Berechnung ebener Dreyecke
 1. Rechtwinklicher — 408 — 419
 2. Schiefwinklicher — 420 — 441

2. Sphärische Trigonometrie.

- a. Grundbegriffe - — 442 — 448
 - b. Berechnung sphärischer Dreyecke
 1. Rechtwinklicher — 449 — 462
 2. Schiefwinklicher — 463 — 478.
-

E I N L E I T U N G.

FINAL TUNG

8

ARITHMETIK.

A R I T H M E T I C

dem, was schon ausgemacht ist, aus, und immer auf neue Wahrheiten fort, welche aus den vorigen folgen, bis man auf etwas bisher Unbekanntes oder Unerwiesenes kömmt, welches man finden oder erweisen wollte, dies nennt man *Synthesis* (synthetische Methode), oder man geht von dem Unbekannten oder Unerwiesenen aus und auf die Gründe zurück, woraus es folgen müßte, bis man auf einen anerkannt richtigen oder unrichtigen Grund kömmt, — dies nennt man *Analysis* (analytische Methode).

§. 18. Bey der Analysis behandelt man also das Unbekannte als ob es schon bekannt wäre und untersucht, wie es zu finden sey, und ob das Unerwiesene auf wahren Gründen beruhe. Dieser Methode bedienten sich schon die Alten in der Geometrie. Plato soll sie zuerst gebraucht haben. In neuern Zeiten hat man sie vervollkommnet und weiter ausgedehnt, indem man die Grössen allgemein durch Buchstaben bezeichnet und sie arithmetisch behandelt, wobey man sich der Gleichungen bedient. Die *geometrische Analysis* der Alten ist durch diese *algebraische Analysis* der Neuern fast zu sehr verdrängt worden.

§. 19. Beydes, sowohl das synthetische, als das analytische Nachdenken, vorzüglich das letztere, ist eine vortrefliche Übung des Verstandes, und dieses, nemlich die Schärfung unserer edelsten Seelenkräfte ist ein Hauptvorthail,

den die Mathematik gewährt. Wie gross übrigens ihr Nutzen im bürgerlichen Leben seyn müsse, lässt sich zum Theil schon aus dem Verzeichnisse der Wissenschaften, die sie begriff, abnehmen. (5...10)

Einige Schriften von der Lehrart und dem Nutzen der Mathematik sind:

Wolfii de methodo mathematica brevis commentatio im Anfange seiner lateinischen Elemente.

Kästners Vorrede zu *Hube's* Abhandlung von den Kegelschnitten.

Klügel prolusio de ratione quam inter se habent in demonstrationibus mathematicis methodus synthetica et analytica. Helmstädt 1767.

Hantschius Einleitung zu einer neuen Ausgabe des Euclids, wo von der mathematischen Methode viel Lesenswerthes vorkömmt, findet man in

Scheibels Einleitung zur mathematischen Bücherkenntniss I. p. 502.

Der mathematischen Wissenschaften Beschaffenheit und Nutzen von *Julio Bernhard von Rohr*. Halle 1713.

Man kann Alles dieses zusammengenommen die *physische Mathematik* nennen.

§. 10. Die Anwendungen der reinen Größenlehre auf Gegenstände des bürgerlichen Lebens kann man unter der Benennung: *bürgerliche* oder *practische Mathematik*, zusammenfassen. Es gehören dahin die *practische Rechenkunst*, die *practische Messkunst*, die *practische Mechanik*, die *architectonischen Wissenschaften*, die *Kriegswissenschaften*, die *Schiffkunst*.

§. 11. Die Anfangsgründe dieser Wissenschaften machen die *Elementarmathematik*, die schwereren Untersuchungen aber die *höhere Mathematik* aus. Genauer lässt sich der Unterschied hier noch nicht angeben.

§. 12. Um sicher zur Erkenntniss der Wahrheiten zu gelangen, beobachtet man in der Mathematik folgende Methode: Zuerst schickt man *Erklärungen* voraus, in welchen die Bedeutung der Wörter bestimmt wird, (*Wörterklärungen*) oder welche auch zugleich die Entstehung, mithin die Möglichkeit der Sache zeigen (*Sacherklärungen*). Die Bedeutung gewisser Zeichen wird ebenfalls zum voraus in *willkürlichen Sätzen* bestimmt.

§. 13. Sodann folgen Sätze, deren Wahrheit dem gesunden Menschenverstande sogleich einleuchtet und die daher zum Grunde gelegt

werden, (*Grundsätze*) wie auch solche, worin etwas zu verrichten verlangt wird, welches zu leicht ist, als dass es nöthig wäre, die Art, wie es geschehen müsse, zu zeigen (*Foderungen*). In der angewandten Mathematik werden auch *Erfahrungen, Beobachtungen und Versuche* zum Grunde gelegt.

§. 14. Hierauf werden Behauptungen vortragen, deren Wahrheit nicht unmittelbar einleuchtet und welche daher eines Beweises bedürfen, (*Lehrsätze*) oder es wird etwas zu verrichten verlangt, wobey die Art, wie es geschehen müsse, gezeigt und die Richtigkeit derselben bewiesen wird (*Aufgaben*).

§. 15. Folgerungen aus den genannten Stücken werden in *Zusätzen* beygebracht. Erläuterungen und Anwendungen aber nebst historischen und litterarischen Nachrichten in *Anmerkungen*.

§. 16. In der angewandten Mathematik setzt man auch zuweilen voraus, dass es sich mit einer Erscheinung so oder so verhalte, und überzeugt sich nachher durch die Übereinstimmung der Erfolge mit der Voraussetzung von der Richtigkeit oder Wahrscheinlichkeit der *Hypothese*. Insonderheit wird dies Mittel in der Astronomie angewandt.

§. 17. Man kann bey den mathematischen Wahrheiten auf zweyerley Art verfahren. Entweder man geht von den ersten Gründen, von

E i n l e i t u n g.

*Begriff, Eintheilung, Lehrart und Nutzen
der Mathematik.*

§. 1.

Wenn Etwas einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, so eignen wir demselben eine Grösse zu. Das Wort: Grösse, bedeutet also überhaupt die *Eigenschaft* eines Dinges, da es einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist.

§. 2. In so fern man keine andere Eigenschaft ausser der eben erwähnten betrachtet, kann man dasjenige, was sich vermehren oder vermindern lässt, selbst eine Grösse nennen.

§. 3. Unsere Begriffe von einer Grösse erhalten wir entweder durch unmittelbare Vorstellung oder durch Vergleichung mit einer andern bekannten Grösse, welches letztere entweder durch unmittelbare Vergleichung oder durch Schlüsse geschehen kann.

§. 4. Die *Mathematik* (Grössenlehre) ist die Wissenschaft Grössen durch Schlüsse zu finden.

§. 5. Die Lehren von den Grössen, absondert von allen übrigen Eigenschaften machen die *reine Mathematik* aus.

§. 6. Man kann sich eine Grösse als eine Menge von Dingen denken, auf deren Zusammenhang und Ordnung nicht gesehen wird. Diese Grössen sind der Gegenstand der *Arithmetik*.

§. 7. Man kann sich aber auch eine Grösse als Etwas in einen Raum Ausgedehntes denken, wobey auf Zusammenhang und Ordnung der Theile gesehen wird. Diese Grössen sind der Gegenstand der *Geometrie*.

§. 8. Anwendungen der reinen Grössenlehre auf mancherley Gegenstände der *Natur* und des *bürgerlichen Lebens* machen die *angewandte Mathematik* aus.

§. 9. Die Gegenstände der *Natur*, worauf die reine Grössenlehre angewendet wird, sind hauptsächlich folgende: die Kräfte der Körper, das Licht und das Weltgebäude. Daraus entstehen also drey Hauptabtheilungen, *Dynamik*, *Optik* und *Astronomie*. Indessen lassen noch andere Gegenstände der Naturlehre eine mathematische Behandlung zu, z. B. die Lehre von dem Schalle, vom Feuer, von der *Electricität*.

Anfangsgründe 1786. S. 29, wo man auch mehrere hierher gehörige Nachrichten findet.

§. 13. *Anmerkung.* Das Rechenbret könnte schon einigermaßen dienen, um Zahlen für den Sinn des Gefühls zu bezeichnen, wie es durch Worte und Ziffern für Gehör und Gesicht geschieht. Zu diesem Ende besonders aber erfand sich *Saunderson*, durch Mangel des Gesichts veranlasst, die Einrichtung, welche die zweyte Figur darstellt, nemlich durchkreuzte Quadrattäfelchen, in deren Durchschnittspunkte er kleine Pflöcke steckte, denen er die in der Figur bemerkte Bedeutung gab. Für jede Ordnung von Einheiten ist eine solche Tafel nöthig; so würde z. B. Fig. 3. die Zahl 1964 (eintausend, neunhundert und vier und sechzig) darstellen.

§. 14. *Willkürlicher Satz.* Einen Bruch schriftlich mit Ziffern zu bezeichnen, setze man den Zähler und Nenner (4) unter einander und ziehe zwischen beyden einen Queerstrich, so dass der Zähler über, der Nenner unter demselben steht. So bedeutet z. B. $\frac{5}{7}$, dass das Ganze in sieben gleiche Theile getheilt ist, und dass man fünf solcher Theile nehmen soll, und wird gelesen: fünf Siebentel.

§. 15. *Willkürlicher Satz.* In dem Falle, wenn das Ganze in zehn, hundert, tausend, zehntausend u. s. w. gleiche Theile getheilt ist,

hat man nicht nöthig den Nenner besonders hinzuschreiben, sondern man schreibe den Zähler wie eine ganze Zahl (7). So wie nemlich die Einheiten nach der linken Hand zu zehnfach wachsen, so nehmen sie nach der rechten Hand zu zehnfach ab. Wenn man folglich rechter Hand der Stelle der Einer (hinter welcher man in diesem Falle ein *Comma* setzt) noch Ziffern schreibt, so bedeutet die, welche in der ersten Stelle hinter dem *Comma* steht, Einheiten, die zehnmal kleiner sind, als einzelne Ganze, d. h. Zehntel; die in der zweyten Stelle bedeutet Einheiten, die wiederum zehnmal kleiner sind, als Zehntel, d. h. Hundertel; die folgenden Tausendtel, Zehntausendtel u. s. w. Hier wird also der Nenner eines solchen Bruchs (der *Decimalbruch* genannt wird) bloss durch die Stellen, welche die Ziffern des Zählers einnehmen, bestimmt. Folgende Zahl 0,985 würde also heissen: kein Ganzes, neun Zehntel, acht Hundertel und fünf Tausendtel.

§. 16. *Anmerkung.* Die *Decimalbrüche* sind von *Johann Müller* von Königsberg, gemeiniglich *Regiomontanus* genannt, einem Mathematiker des funfzehnten Jahrhunderts, zuerst eingeführt worden.

§. 17. *Willkürlicher Satz.* Man kann die Zahlen, so wie die Grössen überhaupt, allgemein durch Buchstaben bezeichnen. Dieses ist oft sehr bequem und verkürzet die Arbeit.

dianern bekommen haben. Das Wort: Ziffer, leiten Einige ab von *Sephera* (numeravit), Andere von *Tzephira* (vacuus fuit). Ausser andern Schriften handelt von dieser Materie *Weidler de characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus*. Wittenberg 1727.

§. 10. *Anmerkung*. Die Art, nach Zehnen zu zählen oder das *Decimalsystem* (Dekadik) ist zwar sehr allgemein, aber keinesweges nothwendig. Es ist möglich, obgleich nicht so bequem, alle Zahlen durch zwey Ziffern 1 und 0 auszudrücken. Dies ist die von *Leibnitz* angegebene (nicht zum Gebrauch vorgeschlagene) *arithmetica binaria*, (Diadik) welche, wie *Leibnitz* aus einem alten Buche schloss, welches dem *Fohi* zugeschrieben wird, schon vor Alters bey den *Chinesen* im Gebrauch gewesen seyn soll. Bequemer als diese würde ein *Duodimalsystem* (Dodekadik) seyn, wozu noch zwey neue Ziffern erforderlich wären. Man hat sogar neuerlich in Frankreich vorgeschlagen, dieses statt des Decimalsystems einzuführen; indessen scheint eine solche Revolution in der Arithmetik nicht rathsam. *Weigel* gab eine *arithmetica quaternaria* (Tetraktik) an, wovon er aus einer Stelle im *Plutarch* muthmassete, dass sie bey den alten *Thraciern* üblich gewesen sey.

Wenn man die 25 Buchstaben des Alphabets nach der Ordnung die ersten Zahlen bis 25 be-

deuten lässet, so hat man eine *arithmetica viginti-senaria*, da denn z. B. die Buchstaben: xyz, als Ziffern betrachtet, die Zahl 16197 sind. (*Karsten's Lehrbegr. II. p. 201.*)

§. 11. *Anmerkung.* Ausser den arabischen Ziffern (7) werden noch zuweilen die römischen Zahlzeichen gebraucht, nach welchen die Zahlen von eins bis zehn so aussehen: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X. Der Buchstab L bedeutet funfzig, C hundert, D fünfhundert, M tausend. Es fällt in die Augen, wie unbequem diese Bezeichnung auch nur zu mässig grossen Zahlen ist.

§. 12. *Anmerkung.* Das *Rechenbret*, dessen man sich ehemals mehr bediente als jetzt, kann einigermaßen die Stelle der Ziffernschrift ersetzen. Auf einem Brete sind verschiedene Linien neben einander gezogen, und Rechenpfennige, die auf diese Linien gelegt werden, bedeuten Einheiten von höhern oder niedrigeren Ordnungen, je nachdem sie auf dieser oder jener Linie liegen. Wenn die Linien von oben nach unten gehen, so wird diese Vorrichtung ziemlich mit der Ziffernschrift übereinstimmend, so könnte man z. B. die Zahl: Siebentausend vierhundert und zwey und dreyssig, durch Rechenpfennige so ausdrücken, wie es die erste Figur zeigt. Für die ersten Anfänger ist es immer noch empfehlungswerth. M. s. *Kästners*

dert heissen *tausend*. Tausendmal tausend eine *Million*. Eine Million Millionen heisst eine *Billion*. Eine Million Billionen heisst eine *Trillion* u. s. w.

§. 6. *Anmerkung*. Durch diese sinnreiche Bezeichnung ist man im Stande jede auch noch so grosse Menge durch wenige Worte auszudrücken. Fast alle Völker haben von den ältesten Zeiten her diese Art zu zählen, da man jede Menge durch Wiederholung der Zehn und Hinzusetzung kleinerer Zahlen ausdrückt, angenommen. Die Ursache davon fällt in die Augen, nämlich die Anzahl der Finger an beyden Händen. *Condamine* fand Völker am Amazonenflusse, die nur bis drey zählten.

§. 7. *Willkürlicher Satz*. Um ganze Zahlen schriftlich auszudrücken, gebrauche man zuvörderst für

die Zahlen	Eins	Zwey	Drey	Vier	Fünf	Sechs
die Ziffern	1	2	3	4	5	6

die Zahlen	Sieben	Acht	Neun
die Ziffern	7	8	9

Grössere Zahlen zu schreiben, setze man mehrere dieser Ziffern neben einander und so wie sie nach der linken Seite zu auf einander folgen lege man den Einheiten derselben einen immer zehnmal höhern Werth bey. Um eine Stelle auszufüllen, in welcher keine von den obigen

Ziffern stehen soll, bedient man sich der Null (o): So bedeutet eine Ziffer in der ersten Stelle rechter Hand *einfache* Einheiten, in der zweyten Stelle nach der linken Hand *Zehende*, in der dritten Stelle *Hunderte*, in der vierten *Tausende*, in der fünften *Zehntausende* u. s. f. oder *zusammengesetzte* Einheiten der ersten, zweyten, dritten, vierten *Ordnung*. Die Ziffern selbst werden dieser Bedeutung gemäss *Einer*, *Zehner*, *Hunderter* u. s. w. genannt. Die Zahlen: zehn, zwanzig, hundert, würden also zum Beyspiel folgendermassen geschrieben: 10 20, 100.

§. 8. *Zusatz*. Nach (§. 5. 7.) kann man nun jede Zahl lesen und schreiben. Grosse Zahlen, welche viele neben einander stehende Ziffern haben, theilt man, um sie richtig auszusprechen, in Classen von sechs Ziffern, und bemerkt mit kleinen Strichen die Stellen der Millionen, Billionen u. s. w. Nur ein Beyspiel: Die Zahl: 78''500321'086490 wird gelesen: acht und siebenzig Billionen, fünfhundert tausend dreyhundert ein und zwanzig Millionen, sechs und achtzig tausend vierhundert und neunzig.

§. 9. *Anmerkung*. Diese so sinnreiche Bezeichnung auch der grössten Zahlen durch wenige Ziffern haben wir Europäer im dreyzehnten Jahrhundert von den Arabern gelernt, welche letztere sie, wie man vermuthet, von den In-

Erklärung und Bezeichnung der Zahlen.

§. 1.

Erklärung.

Eine Zahl ist eine Menge von Dingen einerley Art.

§. 2. *Zusatz.* Die Dinge, deren Menge man sich vorstellt oder angiebt, können zwar in mancher Hinsicht verschieden seyn, aber in so fern man sie in eine Menge zusammenfassen; das heisst *zählen* will, kann man nur das an ihnen betrachten, was sie mit einander gemein haben. Männer und Weiber lassen sich als Personen zusammenzählen, aber nicht als Männer oder als Weiber.

§. 3. *Erklärung.* Dieses Gemeinschaftliche; in Rücksicht dessen Dinge zusammengezählt werden, heisst die *Einheit*. In obigem Beyspiele ist der Begriff: Person, die Einheit. Eine Zahl kann also auch eine Menge von Einheiten genannt werden.

§. 4. *Erklärung.* Wenn die Dinge, welche gezählt werden, Ganze sind, so heisst die Zahl, welche ihre Menge angiebt, eine *ganze Zahl*. Ist aber ein Ganzes in gleiche Theile getheilt, so heisst die Zahl, welche eine Menge solcher Theilē angiebt, eine gebrochene Zahl oder ein *Bruch*. Bey einem Bruche muss daher angegeben werden: erstlich, in wie viel gleiche Theile das Ganze getheilt sey, und zweytens, wie viel dergleichen Theile genommen werden. Jenes thut der *Nenner*, dieses der *Zähler* des Bruchs.

§. 5. *Willkürlicher Satz.* Um ganze Zahlen mit Worten auszudrücken, gebrauche man zuvörderst für

die Mengen	· · · · · · · · · · · · · · ·
die Wörter	Eins Zwey Drey Vier Fünf Sechs

die Mengen	· · · · · · · · · · · ·
die Wörter	Sieben Acht Neun Zehn

Grössere Mengen auszudrücken, setze man zu zehn wieder eins, zwey, drey u. s. w. hinzu. Zehn und zehn oder zweymal zehn nenne man *zwanzig*. Zu zwanzig setze man wiederum eins, zwey, drey u. s. w. hinzu. Dreymal zehn nenne man *dreissig*. Indem dieses immer wiederholt wird, kömmt man auf viermal zehn oder *vierzig*, auf fünfmal zehn oder *funfzig* u. s. w. Zehnmal zehn nenne man *hundert*. Zehnmal hun-

Wenn z. B. die grosse Zahl in (8) oft geschrieben werden müsste, so würde dies nicht nur viel Weitläufigkeit und Mühe machen, sondern man würde auch der Gefahr, sich zu verschreiben, öfterer ausgesetzt seyn, als wenn man sie einmal für allemal durch einen Buchstaben etwa durch *a* andeutete. Man braucht gewöhnlich die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets für bekannte, die letzten, als: *x*, *y*, *z*, für unbekannte Grössen.

§. 18. *Anmerkung.* Diese Bezeichnung der Grössen durch kleine lateinische Buchstaben ist von *Franciscus Vieta* aus Fontenay gegen das Ende des sechzehnten Jahrhunderts eingeführt, wodurch zumal die höhere Arithmetik eine beträchtliche Verbesserung erhielt. Lange vor ihm hatte man indessen schon Grössen allgemein durch Buchstaben bezeichnet. *Leonhardo Fibonacci*, gemeiniglich *Leonhard von Pisa* genannt, brachte diese Bezeichnung schon gegen das Ende des funfzehnten Jahrhunderts aus Bugie in Africa, wo er sie von den Arabern erlernt hatte, nach Europa.

Grundbegriffe vom Rechnen.

§. 19. *Erklärung.* Rechnen heisst: Veränderungen mit den Zahlen vornehmen, um aus den gegebenen Zahlen die gesuchten zu finden.

§. 20. *Zusatz.* Die Veränderungen, welche mit Zahlen vorgenommen werden können, kommen ursprünglich auf Vermehrung oder Verminderung an, (Einleit. 1. 2.) da entweder solche Einheiten, woraus sie besteht, zu ihr hinzugehan oder von ihr hinweggenommen werden. Daher entstehen vier *Rechnungsarten* oder *Species* der Rechenkunst.

§. 21. *Erklärung.* *Addiren* heisst: zu einer Zahl eine oder mehrere andere hinzuthun ohne Rücksicht, ob diese letztern jener ersten gleich oder ungleich sind. *Summe* heisst die Zahl, die den addirten Zahlen zusammengenommen gleich ist.

§. 22. *Erklärung.* *Subtrahiren* heisst: von einer Zahl eine andere hinwegnehmen. *Unterschied* (Differenz, Rest) heisst die Zahl, welche nach geschehener Subtraction übrig bleibt.

§. 23. *Erklärung.* *Multipliciren* heisst: eine Zahl so viel mal nehmen oder so viel einander gleiche Zahlen addiren als eine andere Zahl Einheiten hat. Die Zahl, welche mehreremale genommen wird, und die andere, welche anzeigt, wie oft es geschehen soll, heissen die *Factoren*. Die Zahl, welche herauskömmt, wenn die Multiplication geschehen ist, heisst das *Product*.

§. 24. *Erklärung.* *Dividiren* heisst: von einer Zahl eine andere, so oft es angeht, abzie-

hen; jene heisst der *Dividendus* (numerus dividendus), diese der *Divisor*, und die Zahl, welche nach geschehener Division anzeigt, wie oft der Divisor vom Dividendus abgezogen sey, heisst der *Quotient*.

§. 25. *Willkürlicher Satz*. Zur Abkürzung im Schreiben und zur bessern Übersicht im Lesen dienen bequem folgende Zeichen. Das Zeichen der Addition ist ein Kreuz (†) zwischen den beyden zu addirenden Grössen und wird durch *plus* ausgesprochen, z. B. $a \text{ † } b$. Das Zeichen der Subtraction ist ein Querstrich, ($—$) so zwischen zwey Grössen gesetzt, dass die, von welcher abgezogen werden soll, vor demselben, die, welche abgezogen werden soll, hinter demselben stehe, es wird durch *minus* ausgesprochen, z. B. $a — b$. Das Zeichen der Multiplication ist ein Punct zwischen beyden Factoren, und wird durch *mal* ausgesprochen, z. B. $a . b$. Einige bedienen sich auch folgender Bezeichnung: $a \times b$. Bey Buchstaben kann man auch beyde Factoren ohne Zeichen unmittelbar neben einander setzen, z. B. $a b$. Das Zeichen der Division ist wie die Bezeichnung des Bruchs (14), nemlich ein Querstrich, über welchem der Dividendus und unter welchem der Divisor gesetzt wird, z. B. $\frac{a}{b}$ heisst: a dividirt durch b . Zuweilen bedient man sich auch des Colons ($:$) auf folgende Art: $a : b$; doch werden wir dieses, wo

es vermieden werden kann, nicht als Zeichen der Division gebrauchen.

Noch sind folgende Zeichen zu merken: das Gleichheitszeichen ($=$), z. B. $a = b$ heisst: a ist gleich oder aequal b . Das Zeichen der Ungleichheit $>$ oder $<$, die Öffnung gegen die grössere, die Spitze gegen die kleinere Grösse gekehrt, z. B. $a > b$ heisst: a ist grösser als b , und $a < b$ heisst: a ist kleiner als b .

§. 26. *Grundsätze.* Gleiches zu Gleichem addirt, giebt gleiche Summen. Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt gleiche Unterschiede. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt gleiche Producte. Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt gleiche Quotienten. Von der Summe zweyer Zahlen, die eine abgezogen, lässt die andere übrig. Zu dem Unterschiede zweyer Zahlen die kleinere addirt, giebt die grössere. Das Product aus zwey Factoren enthält den einen Factor so vielmal als der andere Factor die Einheit. Der Divisor ist in dem Dividendus so vielmal enthalten als die Einheit im Quotienten.

Rechnungsarten mit Ziffern.

§. 27. *Aufgabe.* Ganze Zahlen und Decimalbrüche zu addiren.

Auflösung. Man setze die Ziffern, welche einerley Einheiten bedeuten, unter einander,

also die Einer unter die Einer, die Zehner unter die Zehner u. s. w. Hierauf zähle man die niedrigsten zuerst zusammen und schreibe die Summe, oder wenn sie über 9 beträgt, ihre niedrigste Ziffer unter einen gezogenen Querstrich gerade unter die zusammengezählten Ziffern. Die höhern Ziffern der Summe zähle man zu den übrigen Ziffern von eben der Ordnung, welche man noch zusammenzuzählen hat. Auf ähnliche Art verfare man bey den übrigen Ziffern, z. B.

$$\begin{array}{r} 4832 \\ 579 \\ \hline 5411 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 509,23 \\ 6,52 \\ \hline 515,75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 879,457 \\ 100,861 \\ 200,047 \\ \hline 1180,365 \end{array}$$

Beweis. Man hat auf diese Weise alle Einheiten jeder Ordnung zusammengezählt, mithin muss das, was herauskömmt, den Theilen, woraus die gegebenen Zahlen bestehen, zusammen genommen gleich seyn. Um sich von der Richtigkeit des Verfahrens noch desto augenscheinlicher zu überzeugen, kann man die Summen von den Einheiten jeder Ordnung besonders hinschreiben und diese sodann wieder in eine Totalsumme ziehen. In dem ersten der obigen Exempel ist $2 + 9 = 11$, ferner: $3 + 7 = 10$, ferner: $8 + 5 = 13$, endlich: $4 = 4$. Wenn man diese einzelnen Summen abgesondert an gehörigem Orte hinsetzt, wobey man

die leeren Stellen rechter Hand mit Nullen ausfüllen kann (7), so sieht das Exempel so aus:

4832

579

11 = Elf Einse, oder: ein Zehend und Eins.

100 = Zehn Zehende, oder: ein Hundert.

1300 = Dreyzehn Hunderte, oder: ein Tausend und drey Hunderte.

4000 = Vier Tausende. Also zusammen:

5411 = Fünf Tausende, vier Hunderte, ein Zehend und Eins;

oder wie man gewöhnlich spricht: Fünftausend, vierhundert und eilf.

§. 28. *Anmerkung.* Wenn man aus den zu addirenden Zahlen und aus der Summe, so oft es angeht, 9 wegnimmt, so ist das, was von den addirten Zahlen übrig bleibt, gleich dem, was von der Summe übrig bleibt. Dies kann zur Probe dienen, ob die Addition richtig geschehen sey. Die Erläuterung hiervon kann im Vortrage gegeben werden, so wie von einem Kunststücke die Summe mehrerer Zahlen gleichsam blindlings hinzuschreiben.

§. 29. *Aufgabe.* Den Unterschied zweyer gegebenen Zahlen zu finden oder eine kleinere Zahl von einer grössern zu subtrahiren.

Auflösung. Man schreibt, wie bey der Addition, beyde Zahlen so, dass die Ziffern von

einerley Ordnung gerade unter einander stehen, und zwar gewöhnlich die kleinere Zahl (*numerus subtrahendus*) unter die grössere (*numerus minuendus*). Hierauf zieht man jede Ziffer des Subtrahendus von der über ihr stehenden Ziffer des Minuendus ab, indem man bey den niedrigsten anfängt, und setzt den Unterschied unter einen Querstrich.

Im Fall die obere Ziffer kleiner ist als die untere, so legt man ihr in Gedanken eine Einheit der nächst höhern Ordnung zu, da denn aber die Ziffer, von welcher diese Einheit geborgt ist, um eins vermindert gedacht werden muss. Man kann sich dieses *Borgen* durch einen Punct merken, den man über die verminderte Ziffer setzt, wiewohl dies bey einiger Übung nicht nöthig ist. Steht in der Stelle, wo man borgen will, eine Null, so muss man noch eine Stelle weiter hinauf gehen, z. B.

$\begin{array}{r} 6794 \\ 1583 \\ \hline 5211 \end{array}$	$\begin{array}{r} 508,1 \\ 340,6 \\ \hline 167,5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8004,73 \\ 758,50 \\ \hline 7246,23 \end{array}$
--	---	--

Hat der Minuendus keine oder nicht so viel Ziffern hinter dem Comma, als der Subtrahendus, so füllt man diese leeren Stellen mit Nullen aus, z. B.

$\begin{array}{r} 67,000 \\ 44,567 \\ \hline 22,433 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8,900 \\ 0,647 \\ \hline 8,253 \end{array}$
--	---

Beweis. Man hat die Einheiten jeder Ordnung des Subtrahendus von denen des Minuendus abgezogen, mithin muss das, was herauskömmt, der Unterschied beyder seyn. Die ausführlichen Erläuterungen wegen des Borgens können, falls es nöthig ist, mündlich hinzugefügt werden.

§. 30. *Anmerkung.* Die Subtraction kann durch Addition probirt werden und umgekehrt. Der Subtrahendus zum Unterschiede addirt, giebt den Minuendus. Der Unterschied vom Minuendus abgezogen, giebt den Subtrahendus.

§. 31. *Aufgabe.* Zwey gegebene Zahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Erster Fall. Wenn beyde Zahlen einziffericht sind, d. h. bloss aus Einer bestehen, so addire man die eine so oft zu sich selbst als die andere Einheiten hat, so erhält man das Product. (§. 23.)

Zweyter Fall. Um mehrzifferichte Zahlen mit einander zu multipliciren, muss man die Producte von jedem Paare einzifferichter Zahlen entweder aufgeschrieben oder im Gedächtnisse haben. Man multiplicire sodann jede Ziffer des einen Factors mit jeder Ziffer des andern, indem man bey den niedrigsten Ziffern anfängt, und addire diese einzelnen Producte zusammen. Ihre Summe ist das gesuchte Product. Wenn die Factoren Decimalbrüche haben, so gebe man

dem Producte so viel Stellen hinter dem Comma, als beyde Factoren zusammen genommen haben, z. B.

$$\begin{array}{r}
 345,9 \\
 47,2 \\
 \hline
 6918 \\
 24213 \\
 13836 \\
 \hline
 16326,48
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0,94 \\
 0,025 \\
 \hline
 470 \\
 188 \\
 \hline
 0,02350
 \end{array}$$

Beweis. Der erste Fall folgt aus dem Begriff der Multiplication (23). Beym zweyten Falle ist klar, dass die Summe der Producte aus jeder Ziffer des einen Factors in jede Ziffer des andern dem ganzen Producte gleich seyn müsse. Nur wegen der Ordnung der Ziffern ist eine Erläuterung nöthig. Wären im ersten der obigen Exempel die beyden niedrigsten Ziffern 9 und 2 jedes Einer, so wäre das Product derselben $2 \cdot 9 = 18$ einfache Einheiten oder 1 Zehend und 8 einfache Einheiten, mithin die Ziffer 8 ein Einer. Wäre die Ziffer 9 eine Ordnung niedriger, ihre Einheiten also Zehntel, die Ziffer 2 aber ein Einer, so nähme man nun 2 mal 9 Zehntel oder 18 Zehntel oder 1 einfache Einheit und 8 Zehntel, mithin wäre die Ziffer 8 des Products in die erste Stelle hinter dem Comma zu setzen. Ist aber auch die Ziffer 2 eine Ordnung niedriger, so erhellet, dass das Product auch eine Ordnung niedriger werden müsse,

dass folglich die Ziffer 8 in die zweyte, die Ziffer 1 in die erste Stelle hinter dem Comma rücken müsse. Auf eben diese Art kann man auf die Stellen der übrigen einzelnen Producte schliessen.

§. 32. *Anmerkung.* Umständlichere Erläuterungen, die hier zu viel Raum wegnehmen würden, mündlich. Man vergleiche *Kästners Anfangsgründe*. Arithm. I. Cap. 37. 38. und III. Cap. 9. 10.

§. 33. *Anmerkung.* Die Producte jedes Paares einzifferichter Zahlen lassen sich in eine Productentafel bringen, wie Fig. 4. oder abgekürzt Fig. 5. Man nennt sie die pythagorische Tafel oder das Einmaleins, auch den Rechenknecht. Jenen ersten Namen hat sie von dem *Pythagoras*, der bis gegen das Jahr der Welt 3500 lebte und dessen Schule, die er zu Croton stiftete, viel Verdienste um die Rechenwissenschaft hatte.

§. 34. *Anmerkung.* Die Producte aus der Zahl 9 mit jeder andern Zahl haben die Eigenschaft, dass ihre Ziffern als Einer zusammengezählt wieder ein oder etlichemal neun betragen. Diese und ähnliche Erscheinungen bey andern Zahlen gründen sich auf die Natur des Decimalsystems.

§. 35. *Aufgabe.* Eine grössere Zahl durch eine kleinere zu dividiren.

Auflösung und Beweis. Im Allgemeinen: Man ziehe den Divisor, so oft es angeht, vom Dividendus ab, und merke sich wie oft es geschehen ist. Wenn Dividendus und Divisor Decimalbrüche enthalten, so bekommt der Quotient so viel Stellen hinter dem Comma, so viel der Dividendus deren mehr hat als der Divisor. Im Fall der Dividendus weniger Stellen hinter dem Comma hätte als der Divisor, so hängt man ihm so viel Nullen an bis er wenigstens eben so viel hat. Die Verfahrensart wird sich in einigen Beyspielen zeigen lassen.

Divisor	Dividen- dus.	Quo- tient	abgekürzt auf diese Art:
36	18972	500	36 18972 527
500.36 =	18000	20	180 ::
Rest =	972	7	97 :
20.36 =	720	527	72 :
Rest =	252		252
7.36 =	252		252
	0		0

Anstatt den Divisor 36 wirklich nach und nach fünfhundert und sieben und zwanzigmal abzuziehen, welches eine langweilige Arbeit seyn würde, zieht man gleich ein so grosses Vielfaches, als sich thun lässt, hier 500mal 36 von den höchsten Ziffern des Dividendus ab. Zu dem Ende vergleicht man den Divisor 36 mit den höchsten Ziffern des Dividendus 189.

und findet leicht, durch Hülfe des Einmaleins, dass er darin 5mal, oder eigentlich, da es 189 Hunderte sind, 500mal enthalten sey. Auf ähnliche Art verfährt man mit dem Reste u. s. w. so findet man endlich, dass $\frac{18972}{36} = 527$ sey. Wegen der Ordnung der Ziffern ist noch eine Erläuterung nöthig. Es ist klar, dass, wenn des Dividendus Ziffern jede eine Ordnung niedriger, also der Dividendus selbst zehnmal kleiner würde, nun der Divisor nicht mehr so viel mal als zuvor, sondern zehnmal weniger darin enthalten sey, folglich der Quotient eine Ordnung niedriger werden müsse, und dass also überhaupt, so oft der Dividendus eine Ordnung niedriger wird, auch der Quotient eine Ordnung niedriger werde. Ferner aber ist auch klar, dass wenn im Gegentheil der Divisor eine Ordnung niedriger, das heisst: zehnmal kleiner wird, er nun auch zehnmal mehr in dem Dividendus enthalten sey, folglich der Quotient eine Ordnung höher werden müsse, und dass also überhaupt, so oft der Divisor eine Ordnung niedriger wird, auch der Quotient eine Ordnung höher werde. Wäre im obigen Exempel des Dividendus $= 1897,2$ und der Divisor bliebe ungeändert, so würde der Quotient $= 52,7$ werden. Wäre der Divisor 3,6 und der Dividendus ungeändert, so würde der Quotient $= 5270$ werden. Wären aber beyde eine Ordnung niedriger, der Dividendus $= 1897,2$, der Divisor 3,6, so würde der Quotient ungeändert $= 527$ bleiben,

so wie überhaupt erhellet, dass wenn Dividendus und Divisor jeder gleich viel Stellen hinter dem Comma haben, der Quotient so bleiben müsse, wie wenn beyde gar keine hätten, das heisst, dass der Quotient in diesem Falle gar keine Stellen hinter dem Comma bekomme, sondern bloss ganze Einheiten enthalte. Anfänger sind daher am wenigsten in Gefahr zu irren, wenn sie dem Dividendus, falls er weniger Stellen hinter dem Comma hat als der Divisor, so viel Nullen anhängen bis er deren eben so viel hat. Z. B. Es sey 189 zu dividiren durch 0,09.

Divisor	Dividend.	Quot.
0,09	189,00	2000
	180,00	100
	9,00	2100
	9,00	
	0	

$$\begin{array}{r|l} 0,09 & 189 \\ & 189 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2100 \\ . \end{array}$$

§. 36. *Zusatz.* Die Division geht nicht immer auf, das heisst, es bleibt oft zuletzt noch ein Rest, der kleiner ist als der Divisor. In diesem Falle setzt man diesen Rest und den Divisor wie einen Bruch, jenen über, diesen unter einen Querstrich und hängt diesen Bruch dem gefundenen Quotienten an, oder man hängt dem Reste Nullen an und setzt die Division fort, wodurch dem Quotienten Decimalbrüche angehängt werden. Ist der Divisor 10, 100, 1000 u. s. w. so braucht man bloss durch das Comma so viel

Stellen vom Dividendus abzuschneiden als der Divisor Nullen hat.

$$\begin{array}{r}
 603 \overline{) 95004} \quad 157 \frac{3}{6} \frac{3}{6} \frac{3}{6} \\
 \underline{603} \quad : : \\
 3470 : \\
 \underline{3015} : \\
 4554 \\
 \underline{4221} \\
 \text{Rest} = 333
 \end{array}$$

oder auch so :

$$\begin{array}{r}
 603 \overline{) 95004} \quad 157,55 \text{ u. s. w.} \\
 \underline{603} \quad : : \\
 3470 : \\
 \underline{3015} : \\
 4554 \\
 \underline{4221} \\
 333,0 \\
 \underline{301,5} \\
 31 \ 50 \\
 \underline{30 \ 15} \\
 1 \ 35 \text{ u. s. w.}
 \end{array}$$

§. 37. *Anmerkung.* Die Form der Division, die man in obigen Beyspielen sieht, hat den Vorzug vor mehrern andern Divisionsformen, dass ein gemachter Fehler sich leichter entdecken und verbessern lässt. Doch kann man sich auch

in andern Formen üben, die das Verfahren etwas abkürzen.

§. 38. *Zusatz.* Multiplication und Division dienen einander wechselseitig zur Probe wie Addition und Subtraction. Der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt giebt den Dividendus.

§. 39. *Anmerkung.* Kürze halber wollen wir folgende Materien bloss *erwähnen*: Probe der Multiplication durch das Neunfache und Eilffache. (*Bussens Rechenbuch* erste Hälfte nebst Anleitung zum Gebrauch und eben desselben Beyträge zur Mathematik und Physik VIII. St.) — Handgriff bey der Multiplication zweyer einstelliger Factoren durch Einschlagen der Finger. — Vortheile bey Multiplication und Division; wenn der eine Factor oder der Divisor nicht viel von 10, 100, 1000 u. s. w. verschieden sind. (M. s. *Jacob Struve Leitfaden für den Unterricht in der reinen Mathematik*. Hannover 1789.) — Abgekürzte Multiplication und Division bey Decimalbrüchen. (*Kästners Anfangsgründe der Arithmetik* III. 13. 14.) — Kennzeichen, ob eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 aufgehe, d. h. ohne Rest durch sie dividirt werden könne. (*Bussens Algebra* I. §. 500. u. f. *Kästners Fortsetzung der Rechenkunst*. S. 540 bis 547.)

§. 40. *Anmerkung.* Die Nepperschen Rechenstäbe wurden von *Johann Nepper* (oder

richtiger *Napier*) Baron von Merchiston, einem Schottländer, der im Anfange des vorigen Jahrhunderts lebte, erfunden. — Nachrichten davon und von Rechenmaschinen (*Kästners Fortsetzung der Rechenkunst* S. 568 bis 575.)

§. 41. *Erklärung.* Wenn zwey Zahlen jede durch eine und eben dieselbe Zahl aufgehen, so nennt man diese letztere das *gemeinschaftliche Maass* von jenen, z. B. die beyden Zahlen 25 und 15 haben zum gemeinschaftlichen Maasse die Zahl 5. Wenn zwey Zahlen kein gemeinschaftliches Maass haben, so nennt man sie *unter sich Primzahlen*, z. B. die beyden Zahlen 25 und 9. Eine Zahl, die durch keine andere als durch sich selbst und durch 1 aufgeht, heisst eine *absolute Primzahl*, z. B. die Zahlen 11, 13, 17. Zahlen, die durch andere aufgehen, heissen *zusammengesetzte Zahlen*, z. B. die Zahl 12.

§. 42. *Anmerkung.* Zusammengesetzte Zahlen können also als Producte von zwey oder mehrern Factoren angesehen werden. Hierauf beruhen die Vortheile bey dem Multipliciren und Dividiren, da man den Multiplicator oder Divisor, wenn es zusammengesetzte Zahlen sind, in ihre Factoren zerfället, z. B. $31 \cdot 24 = 31 \cdot 3 \cdot 8$.

und $\frac{72}{18} = \frac{72}{9 \cdot 2}$ Da sich mit einstelligen Zahlen

bequem multipliciren und dividiren lässt, so verkürzt dieses manchmal die Rechnung.

§. 43. *Anmerkung.* Man hat Tafeln verfertigt, worin bey jeder Zahl die Factoren angegeben sind, in welche sie sich zerfallen lässt. Dergleichen Tafeln haben unter andern *Lambert* und *Neumann* geliefert. Nachrichten davon findet man in *Kästners Fortsetzung der Rechenkunst.* S. 550 bis 564.

§. 44. *Aufgabe.* Das grösste gemeinschaftliche Maass zweyer Zahlen zu finden.

Auflösung. Man dividire die grössere Zahl durch die kleinere. Geht die Division auf, so ist die kleinere Zahl selbst das gesuchte Maass. Geht sie nicht auf, so dividire man den vorigen Divisor durch den Rest, der bey der ersten Division blieb, und wiederhole dieses bis die Division aufgeht, der letzte Divisor ist dann das grösste gemeinschaftliche Maass.

Exempel. Das grösste gemeinschaftl. Maass der beyden Zahlen 506 und 184 zu finden.

Erste Division.

$$\begin{array}{r|l} 184 & 506 \\ & 368 \\ \hline & 138 \end{array}$$

Zweyte Division.

$$\begin{array}{r|l} 138 & 184 \\ & 138 \\ \hline & 46 \end{array}$$

Dritte Division.

$$\begin{array}{r|l} 46 & 138 \\ & 238 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Ein anderes Exempel. Das grösste gemeinschaftliche Maass der beyden Zahlen 1601 und 305 zu finden.

Erste Division.

Zweyte Division.

Dritte Division.

$$\begin{array}{r|l} 305 & 1601 \\ & \underline{1525} \\ & 76 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 76 & 305 \\ & \underline{304} \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 76 \\ & \underline{76} \\ & 0 \end{array}$$

Hier ist 1 das grösste gemeinschaftliche Maass, d. h. die Zahlen 1601 und 305 sind unter sich Primzahlen.

Beweis. Im ersten Exempel ist, wie man aus der ersten Division erfährt, $506 = 2 \cdot 184 + 138$. Da nun das gemeinschaftliche Maass nicht nur 184, sondern auch 506 messen soll, so muss es auch 138 messen und eine Zahl, die 184 und 138 misst, geht auch in 506 auf. Es ist aber, wie aus der zweyten Division erhellet, $184 = 1 \cdot 138 + 46$ mithin muss die Zahl, welche 184 und 138 messen soll, auch 46 messen, und eine Zahl, welche 138 und 46 misst, geht auch in 184 auf. Die grösste Zahl aber, welche 138 und 46 misst, ist 46 selbst. Wie bey diesem Exempel, so erhellet das Verfahren bey jedem andern.

§. 45. *Anmerkung.* Euclides trägt diese Aufgabe vor im siebenten Buch der Elemente, Satz 2. und in Linien B. X. Satz 3. Man vergleiche übrigens Kästners Fortsetzung der Rechenkunst. S. 523. und Karstens Lehrbegriff. I. Theil den ganzen fünften Abschnitt der Arithmetik.

§. 46. *Zusatz.* Das grösste gemeinschaftliche Maass von drey Zahlen zu finden, suche man es erst von den beyden kleinsten, nach (44), und dann suche man wiederum von dem grössten gemeinschaftlichen Maass der beyden ersten Zahlen und von der dritten das grösste gemeinschaftliche Maass. Z. B. die drey Zahlen seyen 189, 216, 369. Zuerst also von 189 und 216.

Erste Division.	Zweyte Division.	
$\begin{array}{r l} 189 & 216 \\ \hline & 189 \\ \hline & 27 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 27 & 189 \\ \hline & 189 \\ \hline & 0 \end{array}$	Grösste gemeinschaftliche Maass = 27.

Hierauf von 27 und 369.

Erste Division.	Zweyte Division.	Dritte Division.
$\begin{array}{r l} 27 & 369 \\ \hline & 27 \\ \hline & 99 \\ & 81 \\ \hline & 18 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 18 & 27 \\ \hline & 18 \\ \hline & 9 \end{array}$	$\begin{array}{r l} 9 & 18 \\ \hline & 18 \\ \hline & 0 \end{array}$

Also ist 9 das grösste gemeinschaftliche Maass der drey Zahlen 189, 216, 369. Der Grund ist klar. Wenn 27 das grösste gemeinschaftliche Maass der beiden ersten Zahlen ist und nur eine Zahl gesucht wird, die auch die dritte Zahl misst, so kann dies keine grössere Zahl als 27 seyn, weil sie sonst nicht die beyden ersten messen würde. Also entweder muss es 27 selbst oder eine kleinere Zahl als 27 seyn. Im letztern Falle aber muss sie ein Factor von 27

seyn, denn wäre sie dieses nicht, so würde sie wiederum nicht die beyden ersten Zahlen messen. Diese ersten können nemlich keinen gemeinschaftlichen Factor haben, der nicht in ihren grössten gemeinschaftlichen aufgienge, sonst würde ja dieser nicht der *grösste* seyn. Also sucht man von 27 und der dritten Zahl 369 das grösste gemeinschaftliche Maass, so ist die Aufgabe aufgelöst. Bey vier und mehr Zahlen wird das Verfahren wiederholt.

§. 47. *Erklärung.* Ein *eigentlicher* Bruch ist ein solcher, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist. Ein *uneigentlicher* ist ein solcher, dessen Zähler eben so gross oder grösser als der Nenner ist. Z. B. $\frac{3}{4}$ ist ein *eigentlicher*, $\frac{5}{4}$ ein *uneigentlicher* Bruch. Ein *eigentlicher* Bruch ist also kleiner, ein *uneigentlicher* ist eben so gross oder grösser als ein Ganzes.

§. 48. *Zusatz.* Man kann sich alle Brüche als Quotienten vorstellen, wo der Zähler der Dividendus, der Nenner der Divisor ist; und umgekehrt, alle Quotienten als Brüche, wo der Dividendus der Zähler, der Divisor der Nenner ist. Sollte man z. B. den Dividendus 3 durch den Divisor 4 dividiren, so findet sich, dass der Divisor kein ganzes mal im Dividendus enthalten ist, sondern nur Theile desselben, und zwar, wenn der Divisor in vier Theile getheilt wird, so sind drey dieser Theile, d. h. drey Viertheile des Divisors, im Dividendus enthal-

ten. Der Quotient also, welcher angiebt, wie viel mal oder (wie man hier sagen müsste) was für ein Stück des Divisors im Dividendus enthalten sey: ist $\frac{3}{4}$. So in jedem andern Falle, z. B. 7 ist in 18 erstlich zweymal ganz enthalten, überdem aber ist noch ein Stück darin enthalten, nemlich den Divisor in sieben Theile getheilt, so stecken noch vier solcher Theile, d. h. vier Siebentel des ganzen Divisors in dem Dividendus. Der Quotient also, welcher angiebt, wie viel mal der Divisor 7 im Dividendus 18 enthalten sey, ist 2 Ganze und $\frac{4}{7}$, welches man gewöhnlich unmittelbar an einander zu schreiben pflegt $2\frac{4}{7}$. Diese Betrachtungen zeigen, dass die Bezeichnung der Quotienten und Brüche einerley seyn dürfe.

§. 49. *Lehrsatz.* Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, so wird der Bruch so viel mal grösser als diese Zahl Einheiten enthält.

Beweis. Die Theile, worin das Ganze getheilt ist, bleiben dieselben, weil der Nenner derselbe bleibt; von diesen Theilen nimmt man nun so viel mal mehr als die ganze Zahl Einheiten hat, mithin wird der Bruch so viel mal grösser.

§. 50. *Zusatz.* So auch, wenn bey der Division der Dividendus mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, so wird der Quotient so viel mal grösser.

§. 51. *Lehrsatz.* Wenn aber der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, so wird der Bruch so viel mal kleiner als die ganze Zahl Einheiten enthält.

Beweis. Das Ganze wird nemlich hier in so viel mal mehr Theile getheilt, mithin wird jeder Theil so viel mal kleiner, und von diesen kleinern Theilen werden nicht mehr genommen als vorhin von den grössern, mithin ist der Bruch so viel mal kleiner geworden als die ganze Zahl Einheiten enthält.

§. 52. *Zusatz.* So auch wenn der Divisor mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, so wird der Quotient so viel mal kleiner.

53. *Lehrsatz.* Wenn Zähler und Nenner eines Bruchs mit einerley ganzen Zahlen multiplicirt werden, so bleibt die Grösse des Bruchs ungeändert.

Beweis. Durch die Multiplication des Zählers werden so viel mal mehr Theile genommen als die ganze Zahl Einheiten hat, aber durch die Multiplication des Nenners werden die Theile selbst um so viel mal kleiner, mithin hebt eins das andere auf und die Grösse des Bruchs bleibt ungeändert.

§. 54. *Zusatz.* So auch, wenn Dividendus und Divisor mit einerley ganzen Zahlen multiplicirt werden, bleibt die Grösse des Quotienten ungeändert.

§. 55. *Lehrsatz.* Wenn der Zähler eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, so wird der Bruch dadurch um so viel mal kleiner als die ganze Zahl Einheiten hat.

Beweis. Die Theile bleiben bey ungeändertem Nenner dieselben und man nimmt so viel mal weniger von ihnen als die ganze Zahl Einheiten hat, mithin ist der Bruch so viel mal kleiner geworden.

§. 56. *Zusatz.* So auch wenn der Dividendus mit einer ganzen Zahl dividirt wird, so wird der Quotient dadurch so viel mal kleiner.

57. *Lehrsatz.* Wenn aber der Nenner eines Bruchs mit einer ganzen Zahl dividirt wird, so wird der Bruch dadurch so viel mal grösser, als die ganze Zahl Einheiten enthält.

Beweis. Durch die Division des Nenners wird dieser Nenner so viel mal kleiner, d. h. das Ganze wird nun in so viel mal weniger Theile getheilt, mithin werden die Theile selbst so viel mal grösser und von diesen grössern Theilen werden so viele genommen als vorhin von den kleinern, mithin ist der Bruch so viel mal grösser geworden als die ganze Zahl Einheiten enthält.

§. 58. *Zusatz.* So auch wenn der Divisor mit einer ganzen Zahl dividirt wird, so wird der Quotient so viel mal grösser.

§. 59. *Lehrsatz.* Wenn Zähler und Nenner mit einerley ganzen Zahl dividirt werden, so bleibt die Grösse des Bruchs ungeändert.

Beweis. Durch die Division des Zählers werden so viel mal weniger Theile genommen, aber durch die Division des Nenners werden die Theile selbst so viel mal grösser als die ganze Zahl Einheiten hat, mithin hebt eins das andere auf und die Grösse des Bruchs bleibt ungeändert.

§. 60. *Zusatz.* So auch wenn Dividendus und Divisor mit einerley ganzen Zahl multiplicirt werden, so bleibt die Grösse des Quotienten ungeändert.

§. 61. *Aufgabe.* Einen Bruch in einen andern gleich grossen von gegebenen Nenner zu verwandeln.

Auflösung. Da der Nenner des gesuchten Bruchs gegeben ist, so kömmt es bloss darauf an, den neuen Zähler dazu zu finden, und dies geschieht, wenn man den neuen Nenner durch den vorigen Nenner dividirt und mit dem, was herauskömmt, den vorigen Zähler multiplicirt. Oder man kann auch zuerst den neuen Nenner mit dem vorigen Zähler multipliciren und das Product durch den vorigen Nenner dividiren.

Beweis. Gesetzt, es sollte der Bruch $\frac{3}{4}$ auf den Nenner 12 gebracht werden, so kömmt es

darauf an zu erfahren, mit welcher Zahl man den vorigen Nenner 4 multipliciren müsse, um den neuen Nenner 12 zu bekommen, und dies findet sich, wenn man 12 durch 4 dividirt. Wenn man nun auch den Zähler mit dieser Zahl, d. h. mit 3, multiplicirt, so bleibt die Grösse

des Bruchs ungeändert: $\frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4}$

§. 62. *Zusatz.* Wenn der neue Nenner keine solche Zahl ist, in welche der vorige Nenner aufgeht, so muss nothwendig der neue Zähler an und für sich selbst ein Bruch werden. Z. B. wenn $\frac{3}{4}$ auf den Nenner 10 gebracht werden sollte, so würde der neue Zähler $7\frac{2}{4}$ und der neue

Bruch würde so aussehen: $\frac{7\frac{2}{4}}{10}$ Man nennt solche Brüche *unreine* Brüche.

§. 63. *Zusatz.* Einen jeden beliebigen Bruch auf einen Decimalbruch zu bringen, braucht man nur dem vorigen Zähler eine beliebige Anzahl Nullen anzuhängen und mit dem vorigen Nenner zu dividiren (35, 36). Z. B. $\frac{3}{4}$ auf einen Decimalbruch zu bringen.

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 3,00 | 0,75} \\ \underline{28 :} \\ 20 \\ 20 \end{array}$$

Bey manchen Brüchen, wo nemlich der vorige Nenner weder in 10, noch in 100, noch in 1000 u. s. w. aufgeht, kann auch diese Division nicht aufgehen, man führt sie alsdann so weit fort als man es für nöthig hält. Z. B. $\frac{2}{3}$.

$$3 \overline{) 2,000000} \mid 0,666 \dots$$

$$\underline{18}$$

$$20$$

$$\underline{18}$$

20 u. s. w. Eben dieser Fall kam (36) vor.

§. 64. *Aufgabe.* Einen Bruch aufzuheben, d. h. ihn, ohne seine Grösse zu ändern, so auszudrücken, dass Zähler und Nenner kleinere Zahlen werden.

Auflösung folgt aus (58). Man dividire Zähler und Nenner, beyde durch einerley ganze Zahl. Z. B.

$$\frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

§. 65. *Zusatz.* Die ganze Zahl, womit man dividirt, muss ein gemeinschaftlicher Factor von Zähler und Nenner seyn, wenn anders beyde in dem neuern Ausdrücke nicht selbst Brüche werden sollen, welches der Bequemlichkeit, die durch das Aufheben beabsichtigt wird, entgegen wäre.

§. 66. *Zusatz.* Man kann, um das Aufheben desto leichter auszuführen, Zähler und

Nenner in ihre Factoren zerfallen und die gemeinschaftlichen beyderseits wegstreichen. Z. B.

$$\frac{36}{126} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2}{7}$$

Nach (44) kann man auch gleich den grössten gemeinschaftlichen Factor suchen, durch welchen sich Zähler und Nenner dividiren lassen, da man denn den kleinsten Ausdruck des

Bruchs findet. Z. B. $\frac{81}{135}$

$$\begin{array}{r|l} 81 & 135 \\ \hline & 81 \\ \hline & 54 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 81 \\ \hline & 54 \\ \hline & 27 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 27 & 54 \\ \hline & 54 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Also das grösste gemeinschaftliche Maass = 27 und hiemit in Zähler und Nenner dividirt, findet man den Ausdruck in kleinsten Zahlen für

$$\frac{81}{135} = \frac{3}{5}$$

§. 67. *Aufgabe.* Zwey oder mehrere Brüche unter eine Benennung zu bringen, ohne dass unreine Brüche entstehen.

Auflösung. Man multiplicire alle Nenner mit einander, das Product ist der gemeinschaftliche Nenner, sodann multiplicire man den Zähler eines jeden Bruchs mit dem Product aus den Nennern der übrigen, so erhält man die neuen Zähler.

Exempel. Die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ unter einerley Benennung zu bringen. Der gemeinschaftliche Nenner ist $= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Die Brüche sind demnach folgende: $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5}$ und $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5}$ und $\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 5}$

Beweis erhellet aus dem so eben beygebrachten Exempel, denn erstlich haben die neuen Brüche alle einerley Nenner, und zweytens ist klar, dass in der Grösse der Brüche nichts geändert ist, da immer eines jeden Zähler und Nenner mit einerley Zahl, nemlich mit dem Producte aus den Nennern aller übrigen, multiplicirt sind.

§. 68. *Zusatz.* Wenn ein Nenner in einem der übrigen aufgeht, so braucht man jenen nicht mit zu multipliciren, um den gemeinschaftlichen Nenner zu erhalten, z. B. $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{12}$ würden nach (67) reducirt auf $\frac{5 \cdot 12}{6 \cdot 12}$ und $\frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 6}$ aber in beyden Brüchen kann Zähler und Nenner durch 6 dividirt werden, so behalten sie 12 zum gemeinschaftlichen Nenner und werden nun $\frac{5 \cdot 2}{12}$ und $\frac{7 \cdot 1}{12}$

§. 69. *Zusatz.* Wenn zwey oder mehrere Nenner ein gemeinschaftliches Maass haben, so kann man *alle ausser einen* dadurch dividiren, oder welches auf dasselbe hinauskömmt, *alle* damit dividiren, und das gemeinschaftliche Maass selbst nachher mit als Factor bey der Multiplication gebrauchen, wodurch der gemeinschaftliche Nenner gefunden wird, z. B. $\frac{5}{6}$,

$\frac{8}{15}$, $\frac{4}{21}$ würden nach (67) reducirt auf:

$$\frac{5 \cdot 15 \cdot 21}{6 \cdot 15 \cdot 21}, \frac{8 \cdot 6 \cdot 21}{15 \cdot 6 \cdot 21}, \frac{4 \cdot 6 \cdot 15}{21 \cdot 6 \cdot 15}. \quad \text{Offen-}$$

bar kann man aber diese Brüche in kleinern Zahlen ausdrücken, da in jedem derselben zwey Factoren in Zähler und Nenner durch das gemeinschaftliche Maass 3 dividirt werden können. Die Brüche werden sodann folgende:

$$\frac{5 \cdot 5 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 7}, \frac{8 \cdot 2 \cdot 7}{15 \cdot 2 \cdot 7}, \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{21 \cdot 2 \cdot 5}, \quad \text{oder welches ei-}$$

nerley ist (wenn man alle drey Nenner durch das gemeinschaftliche Maass dividirt und dieses mit als Factor zum gemeinschaftlichen Nenner

gebraucht)

$$\frac{5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3}, \frac{8 \cdot 2 \cdot 7}{5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3}, \frac{4 \cdot 2 \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3}.$$

§. 70. *Zusatz.* Um also für mehrere Brüche den *kleinsten* gemeinschaftlichen Nenner zu finden, kann man folgendermaassen verfahren: die zu reducirenden Brüche mögen seyn:

$\frac{1}{8}, \frac{7}{9}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{15}, \frac{8}{25}$; Man setze alle Nenner, als Factoren des nach (67) gefundenen gemeinschaftlichen Nenners, neben einander, und dividire diejenigen, welche ein gemeinschaftliches Maass haben, durch dasselbe.

$$\begin{array}{r} \text{Product aller Nenner} = 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 25 \\ \begin{array}{l} 3) \overline{8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 25} \\ 2) \overline{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 25} \\ 5) \overline{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5} \end{array} \end{array}$$

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist nun das Product aus den gemeinschaftlichen Maassen, womit man dividirt hat, und den noch übrigen Nennern; mithin hier $= 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 25 = 1800$. Die Zähler zu diesem neuen Nenner finden sich, indem man bey jedem Bruche mit seinem vorigen Nenner in diesen neuen Nenner dividirt und was herauskömmt mit seinem vorigen Zähler multiplicirt. Man kann dies in folgender Form ansetzen.

(Gemeinschaftl. Nenn. 1800) Neue Zähler.

$\frac{1}{8}$	225	225
$\frac{7}{9}$	200	1400

(Gemeinschaftl. Nenn. 1800) Neue Zähler.

$\frac{5}{6}$	300	1500
$\frac{2}{3}$	600	1200
$\frac{4}{15}$	120	480
$\frac{8}{25}$	72	576

§. 71. *Erklärung.* Eine Zahl, wo an einer ganzen Zahl noch ein Bruch gehängt ist, wird eine *gemischte Zahl* genannt.

§. 72. *Aufgabe.* Eine ganze oder gemischte Zahl in einen *uneigentlichen Bruch* zu verwandeln.

Auflösung. Eine ganze Zahl zu einem *uneigentlichen Bruche* von gegebenen Nenner zu machen, multiplicirt man sie mit diesem Nenner, was herauskömmt, ist der Zähler des *uneigentlichen Bruchs*, der den gegebenen Nenner hat.

Eine *gemischte Zahl* zu einem *uneigentlichen Bruche* zu machen, der den Nenner des *angehängten Bruchs* hat, multiplicirt man eben-

falls die ganze Zahl mit dem Nenner, rechnet zu diesem Product den Zähler des angehängten Bruchs, was herauskömmt, ist der Zähler des uneigentlichen Bruchs, der den Nenner des angehängten hat.

Exempel und Beweis. Die ganze Zahl 12 als einen Bruch auszudrücken, dessen Nenner 7 wäre, ist: $12 = \frac{12 \cdot 7}{7} = \frac{84}{7}$.

Die gemischte Zahl $12\frac{7}{8}$ als einen Bruch auszudrücken, dessen Nenner 8 wäre, ist: $12\frac{7}{8} = \frac{12 \cdot 8}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12 \cdot 8 + 7}{8} = \frac{96 + 7}{8} = \frac{103}{8}$.

§. 73. Aufgabe. Brüche zu addiren.

Auflösung. Man bringe sie unter eine Benennung und addire die neuen Zähler, ihre Summe ist der Zähler und der gemeinschaftliche Nenner ist der Nenner des Bruchs, welcher den gegebenen Brüchen zusammengenommen gleich ist.

Beweis. Es ist offenbar, dass z. B. 3 Achtel und 4 Achtel zusammen 7 Achtel machen oder

dass $\frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$ sey. Die Theile

sind hier alle gleich und die Zähler geben die Mengen dieser Theile an. Die Summe der Zähler ist also die Summe der Theile.

Exempel. Die Brüche in (70) addirt, geben

$$\frac{1}{8} + \frac{7}{9} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{8}{25} = \frac{5381}{1800}$$

§. 74. *Zusatz.* Wenn die Summe ein uneigentlicher Bruch ist, wie in vorigem Exempel, so zieht man durch wirkliche Division des Nenners in den Zähler die Ganzen heraus, z. B.

$$\begin{array}{r|l} 1800 & 5381 \\ & \underline{3600} \\ & 1781 \end{array} \quad 2 \frac{1781}{1800}$$

§. 75. *Anmerkung.* Sehr bequem sind in diesen und andern Rechnungen die Decimalbrüche, die in der gemeinen Rechenkunst mehr im Gebrauch zu seyn verdienten als sie wirklich sind.

§. 76. *Aufgabe.* Einen kleinern Bruch von einem grössern zu subtrahiren.

Auflösung. Man bringe beyde unter einerley Benennung, subtrahire die neuen Zähler von einander, was übrig bleibt, ist der Zähler des Bruchs, der dem Unterschiede der gegebenen Brüche gleich ist, und dessen Nenner der gemeinschaftliche Nenner ist.

Beweis. So bald die Theile gleich sind, so geben die Zähler die Grössen der Brüche an.

Exempel. $\frac{2}{9}$ abgezogen von $\frac{7}{8}$ oder $\frac{7}{8}$

$$\frac{2}{9} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{63}{72} - \frac{16}{72} = \frac{63 - 16}{72} = \frac{47}{72}$$

§. 77. *Zusatz.* Einen eigentlichen Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen, nimmt man von derselben eine einfache Einheit ab und setzt diese als einen Bruch an, der den Nenner des

Abzuziehenden hat, z. B. $6 - \frac{5}{7} = 5 + \frac{7}{7}$

$5 - \frac{5}{7} = 5\frac{2}{7}$. Oder auch kann man die ganze

Zahl zu einem uneigentlichen Bruche von eben dem Nenner, wie der abzuziehende, ma-

chen: $6 - \frac{5}{7} = \frac{6 \cdot 7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{42 - 5}{7}$

$= \frac{37}{7} = 5\frac{2}{7}$.

§. 78. So verfährt man auch bey gemischten Zahlen, wenn der abzuziehende Bruch grösser ist als der dem Minuendus angehängte, z. B.

$5\frac{3}{8} - \frac{7}{8} = 4\frac{11}{8} - \frac{7}{8} = 4\frac{4}{8} = 4\frac{1}{2}$

oder mit verschiedenen Nennern, z. B.

$$6\frac{3}{4} - 2\frac{7}{9} = 5\frac{7}{4} - 2\frac{7}{9} = 5\frac{63}{36} - 2\frac{28}{36} \\ = 3\frac{35}{36}.$$

§. 79. *Aufgabe.* Mit Brüchen zu multiplizieren.

Auflösung. Entweder ist nur einer der beyden Factoren oder es sind alle beyde Brüche.

Im ersten Falle, wenn der eine Factor eine ganze Zahl, der andere ein Bruch ist, multiplicirt man bloss den Zähler des Bruchs mit der ganzen Zahl, dies giebt den Zähler des Bruchs, der dem Producte der gegebenen Zahlen gleich ist. Sein Nenner ist der Nenner des gegebenen Bruchs.

Im zweyten Falle, wenn beyde Factoren Brüche sind, multiplicirt man Zähler mit Zähler und Nenner; jenes giebt den Zähler, dieses den Nenner des Bruchs, der dem Producte beyder gegebenen Brüche gleich ist.

Exempel und Beweis. Für den ersten Fall

$$6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 3}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}, \text{ welches}$$

aus (50) erhellet. Die Ordnung der Factoren macht hier so wenig wie bey ganzen Zahlen eine Änderung im Product. Es ist sechsmal drey

Viertel = achtzehn Viertel; und umgekehrt: dreyviertelmal sechs ist eine Zahl, die den vierten Theil von dreyimal sechs ausmacht, also auch = achtzehn Viertel.

Für den zweyten Fall: $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 7}$
 $= \frac{12}{35}$, denn $4 \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$ (erster Fall) aber $\frac{4}{5}$ ist fünfmal kleiner als 4, also muss auch das Product fünfmal kleiner seyn als wenn der erste Factor 4 wäre, und dieses wird es, wenn man seinen Nenner mit 5 multiplicirt.

§. 80. *Zusatz.* Gemischte Zahlen werden zuvor in uneigentliche Brüche verwandelt und dann wie (79) behandelt, z. B. $2\frac{3}{4} \cdot 4\frac{2}{5} =$

$$\frac{11}{4} \cdot \frac{22}{5} = \frac{242}{20} = \frac{121}{10} = 12,1.$$

§. 81. *Aufgabe.* Mit Brüchen zu dividiren.

Auflösung und Beweis. Es können folgende Fälle Statt finden.

Erster Fall: Der Divisor eine ganze Zahl; der Dividendus ein Bruch, z. B. $\frac{8}{11}$ zu dividiren durch 4. Wäre der Dividendus = 8. so wäre der Quotient $= \frac{8}{4} = 2$. Da aber der

Dividendus 1 mal kleiner als 8 ist, so muss auch der Quotient 1 mal kleiner als $\frac{8}{4}$ mithin $=$

$\frac{8}{4 \cdot 11} = \frac{2}{11}$ seyn (52). Also: man multiplicire den Nenner des Dividendus mit dem Divisor.

Zweyter Fall: Der Divisor ein Bruch, der Dividendus eine ganze Zahl, z. B. 18 zu dividiren durch $\frac{3}{4}$. Wäre der Divisor $= 3$, so wäre

der Quotient $= \frac{18}{3} = 6$. Da aber der Divisor

4mal kleiner als 3 ist, so muss der Quotient

4mal grösser als $\frac{18}{3}$, mithin $= \frac{18 \cdot 4}{3} = 24$ seyn.

Also: man multiplicire den Dividendus mit dem Nenner und dividire was herauskommt mit dem Zähler des Divisors.

Dritter Fall: Divisor und Dividendus beydes Brüche, z. B. $\frac{5}{6}$ zu dividiren durch $\frac{4}{7}$.

Wäre der Divisor $= 4$, so wäre der Quotient

$= \frac{5}{6 \cdot 4}$ (erster Fall), da aber der Divisor 7mal

kleiner als 4 ist, so muss der Quotient 7mal

grösser als $\frac{5}{6 \cdot 4}$, mithin $= \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 4}$ seyn (zweyter

Fall). Also: man multiplicire des Dividendus Zähler durch des Divisors Nenner, so hat man des Quotienten Zähler. Und umgekehrt: man multiplicire des Dividendus Nenner mit des Divisors Zähler, so hat man des Quotienten Nenner.

§. 82. *Zusatz.* Gemischte Zahlen werden zuvor in uneigentliche Brüche verwandelt und dann wie (81) behandelt, z. B. $5\frac{2}{3}$ zu dividiren

durch $2\frac{6}{7}$. Es ist $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$ und $2\frac{6}{7} = \frac{20}{7}$.

Also der Quotient: $= \frac{17 \cdot 7}{3 \cdot 20} = \frac{119}{60} =$

1,9833.....

§. 83. *Zusatz.* Es können Brüche in ungewöhnlicher Form vorkommen wie folgende: $\frac{\frac{3}{4}}{7}$.

Hier könnte eine Zweydeutigkeit Statt finden. Es könnte nemlich heissen: $\frac{3}{4}$ durch 7 dividirt

$= \frac{3}{4 \cdot 7}$; aber es könnte auch heissen: 3 durch

$\frac{4}{7}$ dividirt $= \frac{3 \cdot 7}{4}$, daher man dergleichen Aus-

drücke lieber vermeidet. Folgender Bruch $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$

heisst nichts anders, als $\frac{2}{3}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt $=$

$\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5}$. Eben so lassen sich auch andere unreine

Brüche immer bequemer ausdrücken, z. B. $\frac{3\frac{5}{7}}{8\frac{2}{9}}$

$$= \frac{26}{7} \text{ durch } \frac{74}{9} \text{ dividirt } = \frac{26 \cdot 9}{74 \cdot 7}.$$

§. 84. *Anmerkung.* Mehrere Erläuterungen über dergleichen Brüche sind nachzulesen in *Kästners Anfangsgr.* Ar. I. 83..85.

Von den sechszigtheiligen Brüchen, welche wegen ihres Gebrauchs in der Geometrie und Astronomie besonders betrachtet werden können, sehe man *Kästners Anfangsgr. Arithm.* III. 15...18.

§. 85. *Anmerkung.* Wenn man die Zahlen nicht bloss im Allgemeinen betrachtet, sondern die Dinge dabey benennt, deren Mengen durch die Zahlen ausgedrückt werden, so heissen diese *genannte Zahlen*. So ist z. B. *fünf* eine ungenannte, *fünf Thaler* aber eine genannte Zahl. Die Anwendung der vorgetragenen Rechnungsarten in Ganzen und Brüchen bey genannten Zahlen gehört eigentlich schon zur angewandten Mathematik, nemlich zur bürgerlichen oder praktischen Rechenkunst. Das Verfahren dabey ist indessen von dem bisherigen nicht wesentlich unterschieden, nur dass man auf die Eintheilung grösserer Einheiten in kleinere, z. B. der Pfunde in Lothe, der Thaler in Groschen Rücksicht zu nehmen hat. Einige Kunstgriffe, um

die Rechnung möglichst kurz auszuführen; verdienen gekannt und geübt zu werden; sie hier zu erläutern, würde zu weitläufig fallen, man findet sie unter dem Namen der welschen Praktik in den praktischen Rechenbüchern ausgeführt, unter deren sehr grossen Anzahl ich hier nur auf folgende verweisen will: *Busse's gemeinverständliches Rechenbuch.* *Clausbergs demonstrative Rechenkunst.*

Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 86. *Erklärung.* Wenn zwey Grössen in einer solchen Beziehung stehen, dass eine die andere vermindert, so nennt man sie *entgegengesetzte Grössen.*

So ist zum Beyspiel *Schuld* die entgegengesetzte Grösse von *Vermögen*; *Ausgabe* ist der *Einnahme* entgegengesetzt; *Rückwärtsgehen* dem *Vorwärtsgehen*; das Gewicht *in der einen Waageschale* dem Gewichte *in der andern*; das *Bejahen* dem *Verneinen*.

§. 87. *Willkührlicher Satz.* Um dergleichen Grössen im Allgemeinen zu unterscheiden, kann man die eine, welche man will, *bejahend* (positiv), die ihr entgegengesetzte *verneinend* (negativ) nennen; man sagt auch: *bejaht* und *verneint*, welches eben dieselbe Bedeutung hat. Ist z. B. *Vermögen* als bejahte Grösse angesetzt, so ist *Schuld* als verneinte Grösse anzusetzen,

umgekehrt aber, wenn Schuld als bejahte Grösse angenommen wird, so ist Vermögen die verneinte Grösse. Die bejahten Grössen können durch $+$, die verneinten durch $-$ angedeutet werden. Wenn bejahte Grössen ganz zuerst in einem Ausdrücke stehen, so braucht man das Zeichen $+$ nicht vorzusetzen. Wenn 100 Thaler Einnahme durch $+$ 100 ausgedrückt wird, so ist 50 Thaler Ausgabe durch $-$ 50 auszudrücken, und umgekehrt; wird Ausgabe als bejaht angesehen, so würde diese $= +$ 50, die Einnahme aber $= -$ 100 seyn.

§. 88. *Zusatz.* Der Ausdruck: Eine verneinte Grösse ist weniger als Nichts, ist richtig, wenn man das Wort *Nichts* auf die bejahte Grösse bezieht. Vollständig müsste es eigentlich heissen: eine verneinte Grösse ist weniger (von der bejahten Grösse) als *Nichts von der bejahten Grösse*. Eben so richtig ist es aber dann auch zu sagen: eine bejahte Grösse ist weniger (von der verneinten Grösse) als Nichts von der verneinten Grösse. In absoluter Bedeutung aber, wo *Nichts* eine gänzliche Abwesenheit jeder Grösse, von welcher Art sie auch sey, anzeigt, würde der Ausdruck Weniger als ein solches *absolutes Nichts* ungereimt und ohne Sinn seyn.

§. 89. *Lehrsatz.* Eine Grösse addiren und eine ihr gleiche entgegengesetzte subtrahiren,

ist einerley. Eine Grösse subtrahiren und eine ihr entgegengesetzte addiren, ist ebenfalls einerley.

Beweis. Denn zu einer Grösse eine entgegengesetzte addiren, heisst: eine Grösse zu ihr hinzuthun, wodurch sie vermindert wird, d. h. sie vermindern, und von einer Grösse eine entgegengesetzte subtrahiren, heisst: eine Grösse von ihr hinwegnehmen, wodurch sie vermindert wurde, d. h. sie vermehren.

§. 90. *Willkührlicher Satz.* Wenn bey der Multiplication der Multiplicandus selbst einigemal genommen werden soll, so gebe man (falls es nöthig ist, es besonders anzuzeigen,) dem Multiplicator das Zeichen $+$. Hingegen wenn nicht der Multiplicandus selbst, sondern sein Entgegengesetztes einigemal genommen werden soll, so gebe man dem Multiplicator das Zeichen: $-$. Ferner: Wenn bey der Division der Divisor selbst einigemal im Dividendus enthalten ist, so gebe man dem Quotienten das Zeichen: $+$. Hingegen um anzudeuten, dass das Entgegengesetzte des Divisors im Dividendus enthalten sey, gebe man dem Quotienten das Zeichen: $-$.

§. 91. *Lehrsatz.* Wenn bey der Multiplication beyde Factoren, bey der Division der Dividendus und Divisor einerley Zeichen haben, so haben Product und Quotient das Zei-

chen: $+$; haben aber jene nicht einerley Zeichen, so haben Product und Quotient das Zeichen: $-$.

Beweis. I. Für die Multiplication erhellet es aus (90). Es sind folgende Fälle möglich.

Erster Fall: $+$ 6 multiplicirt mit $+$ 2, heisst: die bejahte Zahl 6 selbst zweymal nehmen. Das Product ist also: $= + 12$.

Zweyter Fall: $-$ 6 multiplicirt mit $+$ 2, heisst: die verneinte Zahl 6 selbst zweymal nehmen. Das Product ist also: $= - 12$.

Dritter Fall: $+$ 6 multiplicirt mit $-$ 2, heisst: von der bejahten Zahl 6 das Entgegengesetzte zweymal nehmen. Das Product ist also: $= - 12$.

Vierter Fall: $-$ 6 multiplicirt mit $-$ 2, heisst: von der verneinten Zahl 6 das Entgegengesetzte zweymal nehmen. Das Product ist also: $= + 12$.

Allgemein: wenn a und b die beyden Factoren und p das Product bezeichnen, lassen sich die vier Fälle so darstellen.

$$+ a \cdot + b = + p$$

$$- a \cdot + b = - p$$

$$+ a \cdot - b = - p$$

$$- a \cdot - b = + p$$

II. Für die Division erhellet es ebenfalls aus (90), denn wenn Divisor und Dividendus beyde bejaht oder beyde verneint sind, so ist der Divisor selbst im Dividendus enthalten, also bekommt der Quotient das Zeichen: $+$ Ist aber der Divisor verneint, indem der Dividendus bejaht ist, so ist nicht der Divisor selbst, sondern sein Entgegengesetztes im Dividendus enthalten, und eben so, wenn der Divisor bejaht, der Dividendus verneint ist, mithin bekommt der Quotient das Zeichen: $-$.

Wenn a den Divisor, p den Dividendus und b den Quotient bedeutet, so lassen sich die vier möglichen Fälle so darstellen.

$$\frac{+p}{+a} = +b.$$

$$\frac{-p}{-a} = +b.$$

$$\frac{-p}{+a} = -b.$$

$$\frac{+p}{-a} = -b.$$

§. 92. *Anmerkung.* Nach (§. 26.) enthält das Product den einen Factor so oft als der andere Factor die Einheit, und der Divisor ist so

oft im Dividendus enthalten als die Einheit im Quotienten. Auch hieraus lässt sich der Lehrsatz (91) erweisen, die Einheit als bejaht vorausgesetzt. *Kästn. Anfangsgr. Arithm.* I. §. 101 bis 113. *Busse's Algebra* I. §. 239 bis 245 und *Karstens Lehrbegriff* II. B. Algebra I. Abschn.

§. 93. Aufgabe. Bejahte und verneinte Grössen zu addiren.

Auflösung.

Erstes Beyspiel:

$$\begin{array}{r}
 4a + 2b + c - d \\
 \text{dazu addirt} \quad a - 3b - 2c + 4d \\
 \hline
 \text{giebt die Summe} = 5a - b - c + 3d.
 \end{array}$$

Zweytes Beyspiel:

$$\begin{array}{r}
 - a - 3b + 9c \\
 + 3a + b + \frac{1}{2}c \\
 - 5a - \frac{1}{2}b - 3c \\
 \hline
 \text{Summe} = - 3a - 2\frac{1}{2}b + 6\frac{1}{2}c.
 \end{array}$$

Drittes Beyspiel. Ich habe einem Andern anfangs geliehen: 3 thl. 4 gr. 6 pf. darauf leihet er mir 2 thl. weniger 5 gr. wiederum leihe ich ihm 5 thl. weniger 8 pf. und endlich leihet er mir wiederum 17 gr. und 9 pf. wenn ich nun *meine* Foderung als bejaht, *seine* Foderung aber oder meine Schuld verneint ansetze, so ist die Addition folgende:

$$\begin{array}{r}
 3 \text{ thl. } + 4 \text{ gr. } + 6 \text{ pf.} \\
 - 2 \quad + 5 \quad - \\
 5 \quad - \quad - 8 \\
 - \quad - 17 \quad - 9 \\
 \hline
 \text{Summe } 6 \quad - 8 \quad - 11,
 \end{array}$$

Also 6 thl. weniger 8 gr. weniger 11 pf. oder 5 thl. 15 gr. 1 pf. habe ich noch zu fodern.

Beweis erhellet aus (§. 89.)

§. 94. *Aufgabe.* Bejahte und verneinte Grössen zu subtrahiren.

Auflösung. Man verwandle im Subtrahendus jedes Zeichen in das entgegengesetzte und addire wie (§. 93.) z. B.

$$\begin{array}{r}
 4a - 3b + 5c \\
 \text{davon abgezogen } 2a - 4b + 6c \\
 \hline
 \text{Rest } 2a + b - c
 \end{array}$$

Es ist nemlich eben so viel als wenn man

$$\begin{array}{r}
 \text{zu } 4a - 3b + 5c \\
 \text{addirt } - 2a + 4b - 6c \\
 \hline
 \text{Summa } 2a + b - c
 \end{array}$$

Beweis erhellet aus (§. 89.)

§. 95. *Anmerkung.* Man wird hieraus einsehen, wie man einen Ausdruck zu verstehen habe, wo eine *complexe*, d. h. eine in einer Pa-

renthese eingeschlossene, aus bejahten und verneinten Theilen bestehende Grösse abzuziehen ist. Das Exempel (94) kann zum Beyspiele dienen:

$$4a - 3b + 5c - (2a - 4b + 6c)$$

ist soviel als: $4a - 3b + 5c - 2a + 4b - 6c$.

Eben so ist es mit dem Divisionszeichen, welches wie eine Parenthese die Grössen des Zäh-

$$\text{lers verbindet, z. B. } a - \frac{b - c}{2} = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}.$$

§. 96. *Aufgabe. Bejahte und verneinte Grössen zu multipliciren.*

Auflösung und Beweis ergeben sich aus (25) und (91).

Erstes Beyspiel:

$$\begin{array}{r} a + b - c \\ a - b \\ \hline aa + ab - ac \\ - ab \\ \hline aa \quad - ac - bb + bc \end{array}$$

Zweytes Beyspiel:

$$\begin{array}{r} 4a - 3b + 9c \\ - a + 5b \\ \hline - 4aa + 3ab - 9ac \\ + 20ab - 15bb + 45bc \\ \hline - 4aa + 23ab - 9ac - 15bb + 45bc \end{array}$$

§. 97. *Zusatz.* Wenn mehrere Theile einer zusammengesetzten Grösse einen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann man denselben vor einer Parenthese setzen, in welcher die übrigen Grössen eingeschlossen werden, z. B. anstatt $ab - ac$ kann man schreiben $a(b - c)$. Jenes heisst *unverwickelt*, dieses *verwickelt multiplicirt*.

§. 98. *Aufgabe.* *Bejahte und verneinte Grössen zu dividiren.*

Auflösung und Beweis aus 25, 91. Wenn Divisor und Dividendus keine gemeinschaftliche Factoren haben, so muss man sich begnügen, die Division bloss anzudeuten, z. B. $a - b$ durch d zu dividiren, setzt man bloss hin: $\frac{a - b}{d}$.

Haben sie aber gemeinschaftliche Factoren, so werden dieselben in Divisor und Dividendus weggestrichen, z. B. $\frac{ab - bc}{b} = \frac{b \cdot (a - c)}{b}$
 $= a - c$.

Wenn auch der Divisor aus mehreren Theilen bestehet, so verfährt man wie bey der Division in Ziffern, wie aus folgendem Beyspiele zu ersehen ist:

Divis.	Dividendus.	Quotient.
$b - c$	$a b - 2 b b + 5 b c - a c - 3 c c$	$a - 2 b + 3 c$
	$a b$	
	$- a c$	
	$- 2 b b + 5 b c$	$- 3 c c$
	$- 2 b b + 2 b c$	
	$3 b c$	$- 3 c c$
	$3 b c$	$- 3 c c$
	0	0

§. 99. *Zusatz.* Wenn die Division nicht aufgeht, so wird, wie bey der Division in Ziffern, dem Quotienten ein Bruch angehängt, z. B.

Div.	Dividendus.	Quotient.
$a - b$	$a a - a c - b b + b c + d$	$a + b - c + \frac{d}{a - b}$
	$a a$	
	$+ a b$	
	$- a c - b b + b c + d + a b$	
	$- b b$	$+ a b$
	$- a c + b c + d$	
	$- a c + b c$	
	Rest = $+ d$	

§. 100. *Lehrsatz.* Wenn man die halbe Differenz zweyer Zahlen zu ihrer halben Summe addirt, so ist das, was herauskömmt, der grössern Zahl gleich. Wenn man aber die halbe Differenz von der halben Summe abzieht, so ist das, was herauskömmt, der kleinern Zahl gleich.

Beweis. Die beyden Zahlen seyen a und b .
Ihre Summe $= a + b$. Ihre Differenz, wenn
 a die grössere, b die kleinere Zahl ist, $= a - b$.

$$\text{Nun ist } \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b + a - b}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

$$\text{Fern. ist } \frac{a + b}{2} - \frac{a - b}{2} = \frac{a + b - a + b}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

Lehre von den Potenzen.

§. 101. *Erklärung.* Ein Product aus gleichen Factoren heisst eine *Potenz*; oder, welches einerley ist, ein Product, welches herauskömmt, wenn man eine Zahl zu wiederholten Malen mit sich selbst multiplicirt, heisst eine Potenz dieser Zahl.

Die Menge der gleichen Factoren, durch deren Multiplication die Potenz entstanden ist, bestimmt den *Grad* der Potenz. So ist z. B. a die Potenz vom ersten Grade oder die erste Potenz; aa die Potenz vom zweyten Grade oder die zweyte Potenz; aaa die Potenz vom dritten Grade oder die dritte Potenz von a u. s. w.

Die Zahl, durch deren Multiplication mit sich selbst die Potenz entsteht, heisst die *Wurzel*.

§. 102. *Willkührlicher Satz.* Anstatt die Factoren alle neben einander zu setzen, kann man ihre Anzahl, d. h. den Grad der Potenz

durch eine kleine Ziffer andeuten, welche etwas zur Rechten über die Zahl gesetzt wird, so ist a in der zweyten Potenz oder $aa = a^2$, ferner $aaa = a^3$ u. s. w. Diese kleine Ziffer heisst der Exponent des Grades der Potenz, oder schlechtweg: der *Exponent*.

§. 103. *Willkührlicher Satz*. Das Zeichen der Wurzel ist $\sqrt{}$, und durch kleine in die Öffnung dieses Zeichens geschriebene Exponenten zeigt man die Grade der Wurzel an. So bedeutet z. B. $\sqrt[2]{a^2}$ die Wurzel des zweyten Grades von a^2 , doch pflegt man bey der Wurzel des zweyten Grades auch den Exponenten wegzulassen und bloss zu schreiben $\sqrt{a^2}$; ferner: $\sqrt[3]{a^3}$ heisst die Wurzel des dritten Grades von a^3 .

§. 104. *Anmerkung*. Eine Potenz vom zweyten Grade pflegt man auch *Quadrat*, eine vom dritten Grade *Cubus*, und die Wurzeln *Quadratwurzel*, *Cubikwurzel* zu nennen. Die ältern Rechenkünstler hatten noch eine Menge anderer Benennungen und Zeichen um die höhern Grade mündlich und schriftlich auszudrücken. M. s. *Martini* getreuen arithmetischen Wegweiser. Berlin 1741.

Die Quadrate und Cubi einzifferichter Zahlen nebst der 10 kann man in folgende Tafel ordnen:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

§. 105. Aufgabe. Potenzen zu addiren.

Auflösung ist in keinem Stücke von dem obigen Verfahren bey der Addition verschieden. Wenn die Potenzen verschiedene Wurzeln oder verschiedene Exponenten haben, so kann die Addition nur angezeigt werden, z. B. $a^2 + 2a^2 = 3a^2$, aber $a^2 + a^3$, oder auch $a^2 + b^2$, lässt sich nicht anders ausdrücken als es dasteht.

§. 106. Aufgabe. Potenzen zu subtrahiren.

Auflösung. $3a^2 - a^2 = 2a^2$; sind Wurzeln oder Exponenten verschieden, so wird die Subtraction nur angezeigt, z. B. in den Ausdrücken $a^3 - a^2$ oder $a^2 - b^2$ lässt sich die Subtraction nicht weiter ausführen.

§. 107. Anmerkung. Beyde Aufgaben (105, 106) wären nicht werth, hingeschrieben zu werden, wenn nicht Anfänger oft in den Fehler verfielen, zu glauben, dass z. B. $a^2 + a^3 = a^5$, oder $a^5 - a^3 = a^2$ sey.

§. 108. Aufgabe. Potenzen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Sind es Potenzen von verschiedenen Wurzeln, so wird die Multiplication bloss

angezeigt, z. B. $a^2 \cdot b^3$. Sind es Potenzen von einerley Wurzel, so braucht man nur die Exponenten zu addiren, ihre Summe ist der Exponent des Products.

Beweis. Es ist $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = a^5 = a^{2+3}$.

§. 109. *Aufgabe.* Potenzen mit einander zu dividiren.

Auflösung. Sind es Potenzen von verschiedenen Wurzeln, so wird die Division bloss angezeigt, z. B. $\frac{a^2}{b^3}$. Sind es Potenzen von einerley Wurzel, so ziehe man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus ab, ihr Unterschied ist der Exponent des Quotienten.

Beweis. Es ist $\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = aaaa = a^4 = a^{5-2}$.

§. 110. *Zusatz.* Wenn Divisor und Dividendus gleiche Exponenten haben, so ist der Unterschied der letztern $= 0$ und der Quotient $= 1$, z. B. $\frac{a^3}{a^3} = \frac{aaa}{aaa} = a^0 = 1$. Man kann also 1 als eine Potenz vom Grade 0 ansehen.

§. 111. *Zusatz.* Ist der Exponent des Divisors grösser als der Exponent des Dividendus,

so wird der Unterschied (109) verneint, z. B.

$$\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}. \quad \text{Man sieht hieraus, was}$$

man sich bey Potenzen mit verneinten Exponenten zu denken habe, nemlich einen eigentlichen Bruch, dessen Zähler $= 1$, der Nenner aber ein Product von so viel gleichen Factoren ist als

$$\text{der Exponent anzeigt. Denn es ist } \frac{a^2}{a^5} = \frac{aa}{aaaaa}$$

$$= \frac{1}{aaa}, \text{ so dass mithin } a^{-3} \text{ und } \frac{1}{a^3} \text{ einerley be-}$$

deutet.

§. 112. *Anmerkung.* Nach unserm Zahlensystem sind die Ziffern einer hingeschriebenen Zahl als in Potenzen der Zehn multiplicirt, anzusehen, deren Exponenten linker Hand der Einer *bejaht*, rechter Hand *verneint* sind. Es ist z. B. $753,94 = 700 + 50 + 3 + \frac{9}{10} + \frac{4}{100}$
 $= 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$. Die Ordnung der Ziffern kann auch durch kleine Ziffern angedeutet werden, welche *Exponenten der Ordnung* heissen und zum Unterschiede von *Exponenten der Potenz* nicht seitwärts, sondern gerade über der grossen Ziffer geschrieben werden. Die Exponenten der Ordnung sind immer den Exponenten der Potenz der 10 gleich, worin die Ziffer multiplicirt ist. Obige Zahl mit den Exponenten der Ordnung hingeschrieben, sähe so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & & \\ 7 & 5 & 3, & 9 & 4. & & \end{array}$$

§. 113. *Aufgabe.* Ein Product auf eine Potenz zu erheben.

Auflösung. Man erhebe jeden Factor auf die Potenz und multiplicire was herauskömmt mit einander. Es ist $(ab)^3 = ab\ ab\ ab = aaa\ bbb = a^3 \cdot b^3$.

§. 114. *Aufgabe.* Aus einem Producte die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe aus jedem Factor die Wurzel und multiplicire was herauskömmt mit einander. So ist z. B. $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$. Der Beweis folgt aus (113).

§. 115. *Aufgabe.* Einen Quotienten auf eine Potenz zu erheben.

Auflösung. Man dividire die Potenz des Dividendus durch die Potenz des Divisors. Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$.

§. 116. *Aufgabe.* Aus einem Quotienten die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man dividire die Wurzel des Dividendus durch die Wurzel des Divisors. Es

ist $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$. Der Beweis folgt aus (115).

§. 117. *Aufgabe.* Eine Potenz auf einen neuen Grad zu erheben.

Auflösung. Man multiplicire den anfänglichen Exponenten mit dem Exponenten des neuen Grades, so hat man den Exponenten der neuen Potenz. Es ist z. B. $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = aaaaaa = a^{2 \cdot 3} = a^6$.

§. 118. *Aufgabe.* Aus einer Potenz die Wurzel eines gewissen Grades zu ziehen.

Auflösung. Man dividire den anfänglichen Exponenten mit dem Exponenten des Grades, von welchem die Wurzel gezogen werden soll, so hat man den Exponenten der neuen Potenz.

Es ist z. B. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}}$, denn statt a^6 kann man setzen $a^{\frac{6}{3} \cdot 3}$ und dies ist nach (117) $= (a^{\frac{6}{3}})^3$. Also $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^{\frac{6}{3}})^3} = a^{\frac{6}{3}}$.

Man sieht hieraus, was man sich bey gebrochenen Exponenten denken müsse und dass dieselben statt des Wurzelzeichens dienen können.

So ist z. B. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, ferner: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ u. s. w.

§. 119. *Anmerkung.* Da in obigen Sätzen alles auf die nemliche Art erhellen, wenn man statt der gebrauchten Exponenten andere setzte, so kann man die Sätze allgemein so ausdrücken:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (108)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (109)$$

$$(ab)^m = a^m b^m \quad (113)$$

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \quad (114)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (115)$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \quad (116)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (117)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad (118)$$

Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 120. *Lehrsatz.* Das Quadrat einer Zahl, die aus zwey Theilen besteht, enthält: Das Quadrat des ersten Theils, das doppelte Product aus dem ersten Theil in den zweyten und das Quadrat des zweyten Theils.

Beweis.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 \quad + ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}$$

Exempel.

$$\begin{array}{r}
 80 + 6 \\
 80 + 6 \\
 \hline
 6400 + 480 \\
 \quad + 480 + 36 \\
 \hline
 6400 + 960 + 36
 \end{array}$$

§. 121. *Zusatz.* Wenn a ein Zehner, b ein Einer ist, so fängt a^2 in der Stelle der Hunderter an und kann höchstens bis in die Tausender gehen, $2ab$ fängt in den Zehnern an und kann höchstens in die Tausender gehen, b^2 fängt in den Einern an und kann höchstens in die Zehner gehen.

§. 122. *Lehrsatz.* Die Anzahl der Ziffern einer Quadratzahl beträgt niemals mehr als die doppelte Anzahl der Ziffern ihrer Wurzel und niemals weniger als eben diese weniger eins.

Beweis. Das Quadrat einer einzifferichten Wurzel hat nicht mehr als zwey Ziffern, denn das kleinste Quadrat mit drey Ziffern $= 100$ gehört schon zu einer zweyzifferichten Wurzel $= 10$. Weniger aber als eine kann es nicht haben.

Das Quadrat einer zweyzifferichten Wurzel hat nicht mehr als vier Ziffern, denn das kleinste Quadrat mit fünf Ziffern $= 10000$ gehört schon zu einer dreyzifferichten Wurzel $= 100$.

Weniger als drey Ziffern aber hat es nicht, denn das höchste Quadrat mit zwey Ziffern gehört zu einer einzifferichten Wurzel.

Das Quadrat einer dreyzifferichten Wurzel hat nicht mehr als sechs Ziffern, denn das kleinste Quadrat mit sieben Ziffern $= 1000000$ gehört schon zu einer vierzifferichten Wurzel $= 1000$. Weniger als fünf Ziffern aber hat es nicht, denn das höchste Quadrat mit vier Ziffern gehört zu einer zweyzifferichten Wurzel.

Diese Schlüsse lassen sich leicht fortsetzen und allgemein lässt sich dies mit Hülfe der Exponenten der Ordnung so abfassen. Die Anzahl der Ziffern der Wurzel sey $= n$, also die Wurzel $< 10^n$, mithin das Quadrat $< 10^{2n}$, also die Anzahl seiner Ziffern nicht grösser als $2n$; ferner: ist die Wurzel nicht kleiner als 10^{n-1} , also ihr Quadrat nicht kleiner als 10^{2n-2} also die Anzahl seiner Ziffern nicht kleiner als $2n-1$.

§. 123. *Zusatz.* Wenn man also eine Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Classen, jede von zwey Ziffern, theilt, (wo denn die höchste Classe auch nur eine Ziffer haben kann, wenn nemlich die Anzahl der Ziffern ungerade ist) so hat die Wurzel so viel Ziffern als die Quadratzahl solche Classen hat.

§. 124. *Lehrsatz.* In der höchsten Classe einer nach (123) eingetheilten Quadratzahl ist enthalten das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel; aber es kann nicht darin enthalten seyn ein Quadrat von einer grössern Ziffer derselben Ordnung.

Beweis. Wenn die Anzahl der Ziffern der Wurzel $= n$ ist, so gehört die höchste Ziffer der Wurzel zur Ordnung $n - 1$, und ihr Quadrat zur Ordnung $2(n - 1)$. Nun aber ist die Anzahl der Classen der Quadratzahl auch $= n$ und die höchste Classe, das heisst ihre niedrigste Ziffer, ist folglich auch von der Ordnung $2(n - 1)$, mithin muss sie das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel enthalten.

Dass aber kein Quadrat einer grössern Ziffer derselben Ordnung darin enthalten seyn könne, erhellet daraus, weil ein solches Quadrat grösser als das ganze vorgelegte Quadrat seyn würde, folglich nicht in diesem, viel weniger in dessen höchster Classe allein enthalten seyn könnte. Das Exempel (120) kann zur Erläuterung dienen.

§. 125. *Lehrsatz.* In den beyden höchsten Classen einer nach (123) eingetheilten Quadratzahl ist enthalten das Quadrat der beyden höchsten Ziffern der Wurzel, aber es kann nicht darin enthalten seyn ein Quadrat von grössern Ziffern derselben Ordnung.

Beweis. Die niedrigste unter den beyden höchsten Ziffern der Wurzel gehört zu der Ordnung $n - 2$, das Quadrat derselben also zu der Ordnung $2(n - 2)$, die beyden höchsten Classen, d. h. die niedrigste Ziffer in denselben gehört zu eben dieser Ordnung, mithin ist jenes Quadrat in diesen Classen enthalten.

Dass aber kein Quadrat darin enthalten seyn könne, welches eine grössere Wurzel von eben der Ordnung hätte, erhellet daraus, weil ein solches Quadrat grösser seyn würde, als das ganze vorgelegte Quadrat.

Exempel. In der Quadratzahl $28|83|69|$, deren Wurzel 537 ist, enthalten die beyden höchsten Classen $28|83|$ das Quadrat der beyden höchsten Ziffern der Wurzel 53, dieses ist $= 2809$, und zwar von der Ordnung 2, da 53 von der Ordnung 1 ist, von eben dieser Ordnung 2 ist auch $28|83|$. Das Quadrat von 54 aber kann nicht darin enthalten seyn, denn dies wäre grösser als das ganze Quadrat von 537.

§. 126. *Zusatz.* Es erhellet, dass man diese Schlüsse fortsetzen könne und folglich im Allgemeinen: Die m höchsten Classen des Quadrats enthalten das Quadrat der m höchsten Ziffern der Wurzel, aber kein Quadrat einer grössern Zahl.

§. 127. *Aufgabe.* Aus dem Quadrate einer zweyzifferichten Wurzel die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man theile die Quadratzahl in Classen von der Rechten zur Linken, wie (123).

Ziehe alsdann von der höchsten Classe das Quadrat ab, was ihr am nächsten kömmt, dies ist das Quadrat des ersten Theils oder der höchsten Ziffer der Wurzel.

Diese höchste Ziffer findet man also aus der Tafel (104).

Was nach dem Abzuge des Quadrats des ersten Theils noch von der ersten Classe übrig bleibt, gehört zum doppelten Product aus dem ersten Theil in den zweyten $= 2ab$ und was überhaupt von der ganzen Quadratzahl übrig bleibt, ist $= 2ab + b^2$.

Um nun b zu finden, wird mit $2a$ in das Übriggebliebene dividirt und b nur so gross genommen, dass $2ab + b^2$ nicht grösser als das Übriggebliebene des Quadrats sey.

Exempel.

Quadr. Wurz.

$$73 \overline{) 96(86}$$

$$\text{Abgezogen } a^2 = 64 \overline{) 00}$$

$$\text{Bleibt übrig } 2ab + b^2 = 9 \overline{) 96}$$

$$\text{dividirt mit } 2a = 160)$$

$$\text{also } 2ab = 960 \}$$

$$\text{und } b^2 = 36 \}$$

$$\text{addirt } 2ab + b^2 = 996$$

abgezogen, bleibt 0

Verkürzt auf folgende Art:

$$73 \overline{) 96(86}$$

$$64 \overline{) : :}$$

$$9 \ 96$$

$$(16)6$$

$$39 \ 6$$

$$0$$

§. 128. *Zusatz.* Wenn am Ende ein Rest übrig bleibt, so ist dies ein Zeichen, dass die vorgegebene Zahl kein *vollkommenes* Quadrat und dass die Wurzel nicht völlig gefunden sey; indessen kann man sicher seyn, dass die wahre Wurzel nicht um 1 Ganzes grösser sey als die gefundenen, wenn der Rest kleiner ist, als die doppelte gefundene Wurzel plus eins. Die gefundene Wurzel sey $= r$, ihr Quadrat, welches man nach (126) von dem vorgelegten Quadrate abgezogen hat $= r^2$, sollte nun die wahre Wur-

zel $= r + 1$ seyn, so müsste das vorgelegte Quadrat $= (r + 1)^2 = r^2 + 2r + 1$ seyn, welches um $2r + 1$ grösser wäre als das abgezogene Quadrat $= r^2$.

§. 129. *Aufgabe.* Aus einem Quadrate einer drey- oder mehr zifferichten Wurzel die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man theile die Zahl in Classen (123).

Die erste Ziffer der Wurzel findet sich, wie (126), sie ist nemlich die Wurzel desjenigen Quadrats, welches der ersten Classe am nächsten kömmt.

Die zweyte Ziffer der Wurzel findet sich, indem man, wie (126), das Quadrat des gefundenen ersten Theils von dem ganzen Quadrate abzieht und mit dem doppelten ersten Theil dividirt. Man verfährt mit den beyden höchsten Classen gerade so, wie mit dem nur aus zwey Classen bestehenden Quadrate in (126) und findet folglich die Wurzel des in den beyden höchsten Classen enthaltenen Quadrats, d. i. man findet die beyden höchsten Ziffern der Wurzel (124).

Die dritte Ziffer der Wurzel zu finden, braucht man nur auf ähnliche Art zu verfahren, wie bey der zweyten. Man sehe nemlich die beyden gefundenen Ziffern zusammen als den

ersten Theil der Wurzel und die zu findende dritte Ziffer als den zweyten Theil an. Das Quadrat des ersten Theils hat man abgezogen, also dividire man mit dem doppelten ersten Theil, d. h. mit dem Doppelten der gefundenen beyden Ziffern, in das Übrigbleibende des Quadrats u. s. w.

Die vierte und jede folgende Ziffer der Wurzel findet sich völlig auf eben die Art, indem man immer die gefundenen Ziffern als den ersten und die folgende gesuchte als den zweyten Theil ansieht. Man findet so nach und nach die Wurzeln der in der ersten, in den beyden ersten, in den drey ersten Classen u. s. w. enthaltenen Quadrate und dass dieses wirklich die Theile der Wurzel des vorgelegten Quadrates sind, erhellet aus (123, 124, 125).

eExmpel.

	Quadrat.	Wurzel.
	28 83 69 (537	
abgezogen $a^2 =$	25 :: ::	
Rest $2ab + b^2 + =$	3 83 ::	
dividirt mit $2a = 10)$	:: ::	
$2ab =$	3 0 ::	
$b^2 =$	9 ::	
Summe $2ab + b^2 =$	3 09 ::	Bis jetzt hat man
Rest $2Ac + c^2 =$	74 69	$(a + b)^2$ abge-
dividirt mit $2A = 106)$		zogen, welches
$2Ac =$	74 2	A^2 heissen mag.
$c^2 =$	49	
Summe $2Ac + c^2 =$	74 69	Jetzt hat man
Rest =	0	$(A + c)^2$ oder
$(a + b + c)^2$, d. h. das ganze Quadrat abge-		
zogen.		

§. 130. *Zusatz.* Wenn etwas übrig bleibt, so hat man noch nicht die wahre Wurzel gefunden, doch kann diese nicht um 1 Ganzes grösser seyn als die gefundene. Man kann in diesem Falle dem Reste eine oder mehrere Classen von Nullen anhängen, welches eben so viel ist als ob dem Quadrate selbst hinter der Stelle der Einer diese Nullen angehängt wären, wodurch die Grösse der Zahl nicht geändert wird. Wenn man nunmehr die Rechnung, wie (129), fortführt, so gelangt man auf Decimalbrüche der Wurzel. Dass aber die Wurzel einer ganzen

Zahl, wenn sie sich nicht genau in ganzen Zahlen ausdrücken lässt, auch nicht genau durch Brüche sich ausdrücken lasse, wird aus Folgendem erhellen:

§. 131. *Zusatz.* Das Quadrat eines eigentlichen Bruchs ist auch ein eigentlicher Bruch (115), und da ein uneigentlicher Bruch eine ganze Zahl mit einem Bruche ist, so muss auch das Quadrat eines uneigentlichen Bruchs eine ganze Zahl mit einem Bruche seyn. Ist also das Quadrat eine ganze Zahl, so kann die Wurzel kein Bruch weder ein eigentlicher noch uneigentlicher seyn. Hieraus folgt, dass wenn die Wurzel einer ganzen Zahl sich nicht in Ganzen ausdrücken lässt, sie überhaupt niemals genau sich ausdrücken lasse.

§. 132. *Erklärung.* Solche Zahlen, wie z. B. die eben erwähnten Wurzeln, die sich weder durch Ganze noch durch Brüche genau ausdrücken lassen, heissen *Irrationalzahlen* im Gegensatz derer, die sich durch Ganze oder Brüche genau ausdrücken lassen, welche *Rationalzahlen* sind. So ist z. B. $\sqrt{63}$ irrational, $\sqrt{64}$ rational. Weil die Irrationalzahlen weder durch die Einheit noch durch Theile der Einheit gemessen werden, so nennt man sie auch *incommensurabel* (mit der Einheit). Die ältere Benennung *surdische Zahlen* bedeutet eben das.

§. 133. *Zusatz.* Man muss diese Irrationalzahlen, die weder mit der Einheit, noch mit irgend einem Theil der Einheit messbar sind, nicht verwechseln mit solchen, die durch gewisse Theile der Einheit nicht genau ausgedrückt werden können, wie in (62) und (36) vorkommen. Z. B. der Bruch $\frac{2}{3}$ ist zwar nicht genau in Decimalbrüchen auszudrücken und ist folglich mit solchen Theilen der Einheit, welche verneinte Potenzen der Zehn sind, incommensurabel, aber dagegen lässt er sich genau durch Drittel ausdrücken und ist also nicht irrational.

§. 134. *Zusatz.* So wie man sich dem Werthe des Bruches $\frac{2}{3}$ durch fortgesetzte Decimalbrüche näherte (62), so kann man auch die irrationalen Wurzeln durch *Näherung*, so genau man will, finden. Bey jeder neugefundenen Ziffer ist man sicher, nicht mehr um eine Einheit ihrer Ordnung von dem wahren Werthe der Wurzel entfernt zu seyn, da nun die Ordnungen immer niedriger, die Einheiten immer zehnfach kleiner werden, so ist man immer weniger und weniger von dem wahren Werthe entfernt, ob man ihn gleich nie ganz erreicht.

Exempel. Die Wurzel von 3 durch Näherung zu finden:

$$3, | 00 (1,73 \dots$$

$$1 | ::$$

$$2 \ 00$$

$$2) \ 1 \ 40$$

$$49$$

$$1 \ 89$$

$$34) \begin{array}{r|l} 11 & 00 \\ 10 & 20 \end{array} \text{wieder zwey Nullen ange-} \\ \text{hängt.}$$

$$9$$

$$10 \ 29$$

$$71 \text{ u. s. w.}^{\circ}$$

§. 135. *Aufgabe.* Aus einem Bruche die Quadratwurzel zu ziehen.

Auflösung. Wenn Zähler und Nenner vollkommene Quadratzahlen sind, z. B. in dem Bruche $\frac{4}{9}$, so ziehe man aus beyden die Wurzel (116), z. B. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$.

Ist dieses nicht, so verwandle man den Bruch in einen Decimalbruch und ziehe nach (133) die Wurzel daraus.

Oder auch: man multiplicire den Zähler mit dem Nenner, ziehe aus dem Producte die Wurzel und dividire diese durch den Nenner. Der

Grund davon erhellet so: Es ist $\frac{a}{b} = \frac{ab}{b^2}$ und

$$\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$$

Exempel. $r_{\frac{1}{2}} = r_{\frac{2}{4}} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{r_2}{2}$
 $= 0,7071\dots$ so auch $r_{\frac{2}{3}} = r_{\frac{6}{9}} = \frac{r_6}{r_9} = \frac{r_6}{3}$
 $= 0,8164\dots$

§. 136. *Anmerkung.* Die Quadratwurzeln der ersten Primzahlen sind folgende bis auf die Ordnung — 7 berechnet.

$r_2 = 1,4142135\dots$	$r_{11} = 3,3166248$
$r_3 = 1,7320508\dots$	$r_{13} = 3,6055513$
$r_5 = 2,2360679\dots$	$r_{17} = 4,1231056$
$r_7 = 2,6457513\dots$	$r_{19} = 4,3588989$

Durch Multiplication derselben erhält man Wurzeln mehrerer zusammengesetzten Zahlen, z. B.

r_6	$= r_2 \cdot r_3$	$= 2,4494897\dots$
r_8	$= 2 \cdot r_2$	$= 2,8284271\dots$
r_{10}	$= r_2 \cdot r_5$	$= 3,1622776\dots$
r_{12}	$= 2 \cdot r_3$	$= 3,4641014\dots$
r_{14}	$= r_2 \cdot r_7$	$= 3,7416574\dots$
r_{15}	$= r_3 \cdot r_5$	$= 3,8729833\dots$
r_{18}	$= 3 \cdot r_2$	$= 4,2426406\dots$
r_{20}	$= 2 \cdot r_5$	$= 4,4721358\dots$
r_{1000}	$= 10 \cdot r_{10}$	$= 31,6227766\dots$
r_{100000}	$= 100 \cdot r_{10}$	$= 316,2277662\dots$

Ausziehung der Cubikwurzel.

§. 137. *Lehrsatz.* Der Cubus einer Zahl, die aus zwey Theilen besteht, enthält: den Cubus des ersten Theils, das dreyfache Product aus dem Quadrat des ersten Theils in den zweyten, das dreyfache Product aus dem ersten Theil in das Quadrat des zweyten und den Cubus des zweyten Theils.

Beweis.

$$\begin{array}{r}
 a^2 + 2ab + b^2 \\
 \quad a + b \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \hline
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
 \end{array}$$

Exempel.

$$\begin{array}{r}
 6400 + 960 + 36 \\
 \quad 80 + 6 \\
 \hline
 512000 + 76800 + 2880 \\
 \quad 35400 + 5760 + 216 \\
 \hline
 512000 + 115200 + 8640 + 216.
 \end{array}$$

§. 138. *Zusatz.* Wenn a ein Zehner, b ein Einer ist, so fängt a^3 in der Stelle der Tausender an und kann höchstens bis in die Stelle der Hunderttausender gehen; $3a^2b$ fängt in den Hunderten an und kann höchstens bis in die Stelle der Hunderttausender gehen, denn wenn a und b jeder $= 9$ wären, so wäre $3a^2b = 2187$,

höher kann es nicht werden, also kann es nicht mehr als vier Ziffern haben; $3ab^2$ fängt in den Zehnern an und kann höchstens bis in die Zehntausender gehen, da es ebenfalls nicht mehr als vier Ziffern haben kann. Endlich b^3 fängt in den Einern an und kann höchstens bis in die Hunderter gehen, weil der Cubus einer einzelnen Ziffer nicht mehr als drey Ziffern hat, wie man aus der Tafel (104) ersieht.

§. 139. *Lehrsatz. Die Anzahl der Ziffern einer Cubikzahl beträgt niemals mehr als die dreyfache Anzahl der Ziffern ihrer Wurzel und niemals weniger als eben diese weniger zwey.*

Beweis. Da der Beweis ganz dem (122) ähnlich ist, so ist es genug, ihn hier in allgemeinen Ausdrücken herzusetzen. Die Anzahl der Ziffern der Wurzel sey $\overset{n}{=} n$, also die Wurzel $< 10^n$, also die Cubikzahl $< 10^{3n}$, also die Zahl ihrer Ziffern nicht grösser als $3n$. Ferner: ist die Wurzel nicht kleiner als 10^{n-1} , also die Cubikzahl nicht kleiner als 10^{3n-3} , also die Zahl ihrer Ziffern nicht kleiner als $3n-2$.

§. 140. *Zusatz.* Wenn man also eine Cubikzahl von der Rechten zur Linken in Classen jede von drey Ziffern theilt, (wo denn die höchste Classe auch nur zwey oder eine Ziffern ha-

ben kann) so hat die Wurzel so viel Ziffern als die Cubikzahl solche Classen hat.

§. 141. *Lehrsatz.* In der höchsten Classe einer nach (140) eingetheilten Cubikzahl ist enthalten: der Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel, aber es kann nicht darin enthalten seyn: ein Cubus einer grössern Ziffer derselben Ordnung.

Beweis. Wenn die Anzahl der Ziffern der Wurzel $= n$ ist, so gehört die höchste Ziffer der Wurzel zur Ordnung $n - 1$ und ihr Cubus zur Ordnung $3(n - 1)$. Nun aber ist die Anzahl der Classen der Cubikzahl auch $= n$ und die höchste Classe, d. h. ihre niedrigste Ziffer, ist folglich auch von der Ordnung $3(n - 1)$, mithin muss sie den Cubus der höchsten Ziffer der Wurzel enthalten.

Dass aber kein Cubus einer grössern Ziffer derselben Ordnung darin enthalten seyn könne, erhellet daraus, weil ein solcher Cubus grösser als die ganze vorgelegte Cubikzahl seyn würde, folglich nicht in dieser, viel weniger in deren höchster Classe allein enthalten seyn könne. Das Exempel (137) kann zur Erläuterung dienen.

§. 142. *Lehrsatz.* In den beyden höchsten Classen einer nach (140) eingetheilten Cubikzahl ist enthalten: der Cubus der beyden höch-

sten Ziffern der Wurzel; aber es kann nicht darin enthalten seyn: ein Cubus von grössern Ziffern derselben Ordnung.

Beweis. Die niedrigste unter den beyden höchsten Ziffern der Wurzel gehört zu der Ordnung $n-2$; der Cubus derselben also zu der Ordnung $3(n-2)$. Die beyden höchsten Classen der Cubikzahl, d. h. der niedrigsten Ziffer in denselben, gehören aber auch zur Ordnung $3(n-2)$, mithin muss jener Cubus in diesen Classen enthalten seyn.

Dass aber kein Cubus von grössern Ziffern eben der Ordnung darin enthalten seyn könne, erhellet daraus, weil ein solcher Cubus grösser als die ganze vorgelegte Cubikzahl seyn müsste.

Exempel. In der Cubikzahl $154|854|153|$, deren Wurzel 537 ist, enthalten die beyden höchsten Classen $154|854|$ den Cubus von 53 $= 148877$, und zwar von der Ordnung 3, da 53 von der Ordnung 1 ist. Von eben der Ordnung 3 sind auch die beyden höchsten Classen.

Aber der Cubus von 54 kann schon nicht darin enthalten seyn, denn der wäre $= 157464$ ³
 $= 157464000$, also schon grösser als die ganze vorgelegte Cubikzahl.

§. 143. Zusatz. Da diese Schlüsse fortgesetzt werden können, so ist klar, dass im All-

gemeinen die m höchsten Classen der Cubikzahl den Cubus der m höchsten Ziffern der Wurzel, aber keinen Cubus einer grössern Zahl enthalten.

§. 144. *Aufgabe.* Aus dem Cubus einer zweyzifferichten Wurzel die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man theile die Cubikzahl in Classen von der Rechten zur Linken wie (140).

Ziehe sodann von der höchsten Classe den Cubus ab, der ihr am nächsten kömmt, dies ist der Cubus des ersten Theils der Wurzel, da man denn den ersten Theil oder die höchste Ziffer der Wurzel a aus der Tafel (104) findet.

Was nun von der ganzen Cubikzahl übrig bleibt, ist $= 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Um also b zu finden, dividirt man mit dem dreyfachen Quadrat des gefundenen ersten Theils in $3a^2b$, welches sich in der höchsten Stelle der zweyten Classe anfängt, nimmt aber b nur so gross, dass $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ nicht grösser als das Übriggebliebene der Cubikzahl sey.

Exempel.

	Cubus.	Wurzel.
	636 056	(86
abgezogen $a^3 =$	512 000	
	124 056	
dividirt $3a^2) = 192)$		
$3a^2b =$	115 200	}
$3ab^2 =$	8 640	
$b^3 =$	216	
	124 056	

§. 145. *Zusatz.* Wenn am Ende ein Rest übrig bleibt, so ist dies ein Zeichen, dass die vorgegebene Zahl kein *vollkommener* Cubus und dass die Wurzel nicht völlig gefunden sey; indessen ist die gefundene, welche r heissen mag, wenigstens nicht um 1 Ganzes zu klein, wenn der Rest nur kleiner als $3r^2 + 3r + 1$ ist; denn um so viel müsste der Cubus von $r + 1$ grösser seyn als der Cubus von r .

§. 146. *Aufgabe.* Aus einem Cubus einer drey- oder mehrzifferichten Wurzel die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Man verfare auf eben die Art wie in (144) indem man jedesmal die gefundenen Ziffern der Wurzel als den ersten Theil ansieht, dessen Cubus man nun abgezogen hat, die folgende Ziffer aber als den zweyten Theil,

den man durch die Division mit dem dreyfachen Quadrat des gefundenen ersten Theils findet. So findet man nach und nach die Wurzel der in der ersten, in den beyden ersten, in den drey ersten Classen u. s. w. enthaltenen Cubikzahlen und dass diese wirklich die Theile der Wurzel sind, erhellet aus (141 bis 143).

Exempel.

154	854	153(537
abgezogen $a^3 =$	125	:::
29		854
dividirt $3a^2 = 75)$		:::
$3a^2b =$		22 500
$3ab^2 =$		1 350
$b^3 =$		27
Summe $3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$		23 877
Rest $3A^2c + 3Ac^2 + c^3 =$		5 977
Bis jetzt hat man $(a + b)^3$ abgezogen, welches A^3 heissen mag.		153
dividirt mit $3A^2 = 8427)$		
$3A^2c =$		5 898 900
$3Ac^2 =$		77 910
$c^3 =$		343
Summe $3A^2c + 3Ac^2 + c^3 =$		5 977 153
Rest =		0

Jetzt hat man $(A + c)^3$ oder $(a + b + c)^3$, d. h. die ganze Cubikzahl abgezogen.

§. 147. *Zusatz.* Wenn die vorgegebene Zahl keine vollkommene Cubikzahl ist, so bleibt am Ende ein Rest, und die Wurzel ist noch nicht genau gefunden, doch ist die gefundene nicht um 1 Ganzes zu klein (145). Die wahre Wurzel einer solchen unvollkommenen Cubikzahl ist, so wie die wahre Wurzel einer unvollkommenen Quadratzahl (131) *irrational* und wird durch Näherung so genau als man es für nöthig hält gefunden, indem man der vorgelegten Zahl oder dem Reste eine oder mehrere Classen von drey Nullen hinter der Stelle der Einer anhängt, wodurch die Grösse der Zahl nicht geändert wird. Sodann erhält man durch Fortsetzung des Verfahrens (146) Decimalbrüche, wovon hier eben das gilt, was (134) gesagt ist.

Exempel. Die Cubikwurzel von 3 durch Näherung zu finden.

$$\begin{array}{r}
 3, | 000 (1,44 \dots \\
 \underline{1} \quad : : : \\
 \text{Rest } 2 \quad | 000 \\
 \text{Divisor } 3) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 200 \\
 \quad 480 \\
 \quad \quad 64 \\
 \hline
 1 \quad 744 \\
 \hline
 \text{Rest } 256 \quad | 000 \\
 \text{Divisor } 588) \\
 \begin{array}{r}
 235 \quad | 200 \\
 \quad 6 \quad 720 \\
 \quad \quad 64 \\
 \hline
 241 \quad 984 \\
 \hline
 \text{Rest } 14 \quad 016 \text{ u. s. w.}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

§. 148. *Aufgabe.* Aus einem Bruche die Cubikwurzel zu ziehen.

Auflösung. Die Cubikwurzel eines Bruchs ist die Cubikwurzel des Zählers mit der Cubikwurzel des Nenners dividirt. Sind Zähler und Nenner vollkommene Cubikzahlen, so zieht man also aus jedem die Wurzel, z. B. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$.

Ist dieses nicht, so verwandelt man entweder den Bruch nach (62) in einen Decimalbruch und zieht wie in (147) die Wurzel aus;

Oder auch: man multiplicirt den Zähler mit dem Quadrat des Nenners, zieht aus dem Producte die Wurzel und dividirt diese durch den

Nenner. Es ist nemlich $\frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3}$ also $\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}.$$

Exempel.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{48}{64}} = \frac{\sqrt[3]{48}}{4} = 0,9\dots$$

§. 149. *Anmerkung.* Wenn man die Cubikwurzeln einiger Primzahlen berechnet, so kann man daraus, nach (114), durch Multiplication die Cubikwurzeln zusammengesetzter Zahlen finden, wie (136) bey den Quadratwurzeln. So ist z. B. $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{(64 \cdot 2)} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2} = 5,039684.$

§. 150. *Anmerkung.* Vom Gebrauch der Quadrat- und Cubiktafeln bey Findung der Wurzeln, wodurch die Rechnung sehr abgekürzt wird, sehe man *Kästner* Ar. IV. 46. f. Von Findung rationaler Wurzeln durch gewisse Kennzeichen der Endziffer, ebend. Von den Proben der Quadrat- und Cubiktafeln durch Wegwerfung der Neun. *Klügels* Encyclopäd. Arithm. 66. Nachrichten von solchen Tafeln,

Kästner a. a. O. Ausführlichere Erläuterungen der ganzen Lehre von Ausziehung der Wurzeln, *Karstens* Lehrbegriff allg. Rechenk. IV. Abschn. *Kästner* Arithm. IV. Cap. und wenn man will: *Müllers* Erläuterung dieser Materie zum bessern (?) Verständniss der Kästnerschen Anfangsgründe. — *Euklides* handelt von Quadrat- und Cubikzahlen im neunten Buehe und von Rational und Irrationalgrössen im zehnten Buehe der Elemente.

Arithmetische Proportion.

§. 151. *Erklärung.* *Verhältniss* ist die Beziehung zweyer Grössen gegen einander, da die eine aus Vergleichung mit der andern erkannt wird, *einfach*, wenn die beyden Grössen unmittelbar mit einander verglichen werden. Die beyden Grössen heissen die *Glieder* der Verhältniss, die eine das *vorhergehende*, die andere das *folgende* Glied.

§. 152. *Erklärung.* *Proportion* ist die Gleichheit zweyer Verhältnisse und besteht also aus vier Gliedern. Eine *stetige* Proportion ist eine solche, wo das zweyte und dritte Glied einerley sind.

§. 153. *Erklärung.* *Einfache arithmetische Verhältniss* ist die unmittelbare Beziehung zweyer Grössen gegen einander, da die eine um einen gewissen *Unterschied* grösser oder kleiner ist als die andere.

§. 154. *Willkührlicher Satz.* Das Zeichen der arithmetischen Verhältniss ist das Subtractionszeichen, z. B. $7 - 9$ bedeutet hier die arithmetische Verhältniss von *Sieben* zu *Neun*.

Die Bezeichnung der arithmetischen Proportion ist demnach folgende, z. B. $7 - 9 = 13 - 15$, d. h. die arithmetische Verhältniss von sieben zu neun ist gleich dem arithmetischen Verhältniss von dreyzehn zu funfzehn.

§. 155. *Lehrsatz.* In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder der Summe der mittlern gleich.

Beweis. In der arithmetischen Proportion $a - b = f - g$, wo der Unterschied d heissen mag, ist $b = a \underline{+} d$ und $g = f \underline{+} d$, also $a \underline{+} g = a \underline{+} f \underline{+} d$ und $b \underline{+} f = a \underline{+} d \underline{+} f$, welches beydes offenbar einerley ist.

§. 156. *Zusatz.* In einer stetigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äussern Glieder so gross als das mittlere doppelt genommen.

§. 157. *Zusatz.* Wenn $a - b = f - g$, so ist auch $a - f = b - g$. Man kann die Glieder verwechseln.

§. 158. *Zusatz.* Wenn die Summe zweyer Zahlen der Summe zweyer andern gleich ist, so lassen sich die vier Zahlen in eine arithmetische

Proportion ordnen, z. B. wenn $5 + 7 = 2 + 10$, so lassen sich 5, 7, 2, 10 in folgende arithmetische Proportion setzen: $5 - 2 = 10 - 7$, oder auch: $2 - 5 = 7 - 10$, oder auch: $5 - 10 = 2 - 7$.

§. 159. *Aufgabe.* Zu drey gegebenen Zahlen die vierte arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man addire das zweyte und dritte Glied und von der Summe ziehe man das erste Glied ab.

Beweis. In der Proportion $a - b = f - g$ ist nach (155) $a + g = b + f$, also $g = b + f - a$.

§. 160. *Aufgabe.* Zu zwey gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. Man halbire die Summe der beyden gegebenen Zahlen.

Beweis. In der Proportion $a - m = m - b$ ist $a + b = m + m = 2m$. Also $m = \frac{a + b}{2}$

§. 161. *Anmerkung.* Das arithmetische Mittel mehrerer gegebenen Zahlen wird auf ähnliche Art gefunden, man addirt nemlich alle Zahlen und dividirt ihre Summe durch die An-

zahl derselben, z. B. $\frac{5 + 7 + 6 + 4}{4} = 2\frac{2}{4}$
 $= 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$. Man bedient sich dieses Mittels
 aus verschiedenen Angaben den wahrscheinlich
 richtigen Werth einer Grösse zu bestimmen.

Geometrische Proportion.

§. 162. *Erklärung.* *Einfache geometrische Verhältniss* ist die unmittelbare Beziehung zweyer Grössen gegen einander, da die eine einigemal grösser als die andere oder einigemal in der andern enthalten ist.

§. 163. *Willkührlicher Satz.* Das Zeichen der geometrischen Verhältniss ist das zweyte unter den beyden oben erwähnten Divisionszeichen, welches man, Verwirrung zu vermeiden, selten als Divisionszeichen gebraucht, z. B. $4:8$ bedeutet die geometrische Verhältniss von vier zu acht.

Die Bezeichnung der geometrischen Proportion ist also folgende: z. B. $4:8 = 6:12$.

§. 164. *Erklärung.* *Exponent* der Verhältniss, (Namen der Verhältniss, Verhältnisszeiger) ist die Zahl, welche anzeigt wie vielmal das vorhergehende Glied im folgenden Gliede enthalten sey.

§. 165. *Zusatz.* Ist das folgende Glied grösser als das erste, so ist der Exponent entweder

eine ganze Zahl, z. B. in der Verhältniss $4:8$, wo der Exponent $= 2$ ist oder eine ganze Zahl und ein Bruch (uneigentlicher Bruch), z. B. in der Verhältniss $4:10$, wo der Exponent $= 2\frac{1}{2}$ ist. Ist aber das folgende Glied kleiner als das vorhergehende Glied, so ist der Exponent ein eigentlicher Bruch, z. B. in der Verhältniss $6:3$ ist der Exponent $= \frac{1}{2}$. Überhaupt ist der Exponent immer einem Bruche gleich, dessen Zähler das folgende Glied der Verhältniss und dessen Nenner das vorhergehende Glied der Verhältniss ist.

§. 166. *Zusatz.* Der Exponent kann auch eine Irrationalzahl seyn, da denn die Verhältniss selbst eine Irrationalverhältniss genannt wird. Man drückt dann den Exponenten so genau als man nöthig findet, mittelst der Näherung in Rationalzahlen aus. Sind beyde Glieder der Verhältniss rational, so ist auch der Exponent rational. Ist ein Glied irrational, das andere rational, so ist der Exponent irrational, z. B. $5:\sqrt{7}$. Sind beyde Glieder irrational, so kann der Exponent rational seyn, z. B. in der Verhältniss $4\sqrt{7}:8\sqrt{7}$.

§. 167. *Grundsatz.* Zwey Verhältnisse, die einer dritten gleich sind, sind einander selbst gleich. Zwey Grössen, die zu einer dritten einerley Verhältniss haben, sind einander gleich.

§. 168. *Lehrsatz.* In jeder geometrischen Proportion ist das Product der äussern Glieder dem Producte der mittlern gleich.

Beweis. In der Proportion $a:b = f:g$ sey der Exponent $= e$, also $b = ae$ und $g = fe$, mithin $ag = afe$ und $bf = aef$; aber es ist $afe = aef$.

§. 169. *Zusatz.* In einer stetigen Proportion ist das Product des äussern Gliedes dem Quadrat des mittlern gleich $a:b = b:g$, also $ag = b^2$.

§. 170. *Zusatz.* Das Quadrat ist die dritte Proportionalzahl zu 1 und der Wurzel. Die Wurzel ist die mittlere Proportionalzahl zwischen 1 und dem Quadrate.

§. 171. *Zusatz.* Wenn das Product zweyer Factoren dem Product zweyer andern Factoren gleich ist, so lassen sich die vier Factoren in eine geometrische Proportion ordnen, so dass die Factoren des einen Products die äussern, die Factoren des andern Products die mittlern Glieder werden.

§. 172. *Aufgabe.* Zu drey Grössen die vierte Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung. Wenn a, b, c die bekannten, x die gesuchte Grösse ist, so soll seyn:

$$\begin{array}{lcl}
 & a : b & = c : x \\
 \text{also} & ax & = bc \\
 \text{folglich} & x & = \frac{bc}{a}.
 \end{array}$$

Das zweyte und dritte Glied mit einander multiplicirt und durch das erste Glied dividirt, giebt das gesuchte vierte Glied.

Exempel. $7 : 31 = 12 : x$

$$x = \frac{31 \cdot 12}{7} = 3\frac{7}{7}^2 = 53\frac{1}{7}$$

§. 173. *Anmerkung.* Häufige Anwendungen dieser Aufgabe unter dem Namen *Regel de tri* (Regula de tribus terminis) — sogenannte *verkehrte Regel de tri* — Rechnungsvortheile (wälsche Praktik) — alles dies übergehen wir hier und überlassen es der praktischen Rechenkunst.

§. 174. *Aufgabe.* Zwischen zwey Grössen die mittlere geometrische Proportionalgrösse zu finden.

Auflösung. Es sey $a : x = x : b$, also: $ab = x^2$, folglich $x = \sqrt{ab}$. Man multiplicire die beyden gegebenen Grössen und ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel.

§. 175. *Lehrsatz.* Aus einer Proportion $a : b = f : g$ lassen sich mehrere andere herleiten, man kann nemlich

I. die mittlern Glieder verwechseln $a:f = b:g$.

II. die vorhergehenden und folgenden Glieder addiren: $a + f : b + g = a : b$, auch: $a + b : f + g = a : f$.

III. Eben dieselben von einander abziehen: $a - f : b - g = a : b$, auch $a - b : f - g = a : f$.

IV. Daher auch aus II. und III. noch folgt: dass $a + f : b + g = a - f : b - g$, wie auch dass $a + b : f + g = a - b : f - g$.

Beweis. Man darf nur in allen diesen Proportionen die Glieder b und g durch ae und fe ausdrücken, so wird sich zeigen, dass die Producte der mittlern und äussern Glieder einander gleich sind.

§. 176. *Anmerkung.* Diejenigen Veränderungen, wo die Glieder in jeder Verhältniss die nämlichen bleiben und nur ihre Lage verändert wird, so wie Exempel zu (175), hier herzusetzen würde unnöthig seyn.

§. 177. *Lehrsatz.* Wenn in einer Proportion die Glieder, die zu einer Verhältniss gehören oder auch die ähnlichliegenden aus jeder Verhältniss mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden, so bleiben die vier Glieder in Proportion.

Beweis. Wenn $a:b = f:g$, so ist auch $an:bn = f:g$, denn $\frac{bn}{an} = \frac{b}{a}$. Eben so $\frac{a}{n}:\frac{b}{n} = f:g$, denn $\frac{a}{n} = \frac{1}{n}a$, und $\frac{b}{n} = \frac{1}{n}b$ und $\frac{\frac{1}{n}b}{\frac{1}{n}a} = \frac{b}{a}$. Für die ähnlichliegenden Glieder erhellet der Satz durch Verwechselung der Glieder, indem man z. B. statt $an:bn = f:g$ schreiben kann $an:f = bn:g$ (175).

§. 178. *Aufgabe.* Eine Zahl nach einer gegebenen Verhältniss einzutheilen.

Auflösung. Die Zahl sey $= n$, die gegebene Verhältniss $= a:b$, die gesuchten Theile von n , die sich wie a und b verhalten sollen, seyn x und y . Es soll also seyn:

$$\begin{aligned} a &: b = x : y \\ \text{folglich } a \div b : a &= x \div y : x \quad (175) \\ \text{das ist } a \div b : a &= n : x \\ \text{oder auch } a \div b : n &= a : x \\ \text{mithin } x &= \frac{an}{a \div b} \end{aligned}$$

Exempel. Man soll 100 in zwey Theile theilen, die sich wie 2:3 verhalten. Also die vierte unter obigen Proportionen angesetzt:

$$\begin{array}{rcl}
 5 : 100 & = & 2 : x \\
 x & = & 2 \frac{0}{5} = 40 \\
 \text{folglich } y & = & 60
 \end{array}$$

§. 179. *Zusatz.* Dasselbe Verfahren findet Statt, wenn drey oder mehrere Theile gemacht werden sollen. Es ist nach 178.

$$\begin{array}{l}
 a + b : x + y = b : y \\
 \text{Wenn nun überdem } b : y = c : z \\
 \text{so ist } a + b : x + y = c : z (167) \\
 \text{also auch } a + b + c : x + y + z = c : z (175)
 \end{array}$$

So auch bey mehrern Grössen.

§. 180. *Anmerkung.* Anwendungen dieser Aufgabe kommen in der praktischen Rechenkunst bey der *Gesellschafts-* und *Vermischungsrechnung* vor.

§. 181. *Lehrsatz.* Wenn in zwey geometrischen Proportionen die Glieder der einen mit den Gliedern der andern nach der Ordnung multiplicirt werden, so sind die vier Producte in geometrischer Proportion.

$$\begin{array}{l}
 \text{Wenn } a : b = c : d \\
 \text{und } f : g = h : k \\
 \hline
 \text{so ist } af : bg = ch : dk.
 \end{array}$$

$$\text{Beweis. Es ist } \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \text{ und } \frac{g}{f} = \frac{k}{h} (165).$$

$$\text{Also } \frac{bg}{af} = \frac{dk}{ch}, \text{ woraus die letzte Proportion folgt.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Exempel. } 2 : 4 = 3 : 6 \\ 5 : 15 = 7 : 21 \\ \hline 10 : 60 = 21 : 126. \end{array}$$

§. 182. *Zusatz.* Der Exponent in der letzten Proportion ist das Product aus den Exponenten der beyden ersten.

§. 183. *Zusatz.* Wenn drey Proportionen unter einander gesetzt werden, so gilt eben das was eben von zweyen gesagt ist, so auch bey mehreren.

§. 184. *Zusatz.* Auch wenn die Glieder der einen mit den Gliedern der andern dividirt werden, machen die Quotienten eine Proportion, denn es ist $ad = bc$ und $fk = gh$, mithin $\frac{ad}{fk}$
 $= \frac{bc}{gh}$ oder $\frac{a}{f} \cdot \frac{d}{k} = \frac{b}{g} \cdot \frac{c}{h}$, also (171) $\frac{a}{f}$
 $: \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{k}$.

§. 185. *Zusatz.* Wenn $a : b = c : d$
 und noch einmal $a : b = c : d$
 so ist $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$.

Alle vier Glieder einer Proportion auf einerley Potenz erhoben, machen eine Proportion. Auch umgekehrt: aus allen vier Gliedern die Wurzel von einerley Grade gezogen, entsteht

eine Proportion; denn da $ad = bc$ so ist auch $rad = rbc$ oder $ra \cdot rd = rb \cdot rc$ (114), folglich $ra : rb = rc : rd$.

§. 186. *Zusatz.* Wenn $a : b = c : d$
und $b : g = d : k$
so ist $ab : bg = cd : dk$
oder $a : g = c : k$.

§. 187. *Zusatz.* Wenn $a : b = c : d$
und $b : g = h : c$
so ist $ab : bg = ch : dc$
oder $a : g = h : d$.

§. 188. *Zusatz.* Wenn $a : b = c : d$
und $f : b = h : d$
so ist $a : f = c : h$

denn man kann die zweyte Proportion in folgende verändern: $b : f = d : h$ und darans folgt nach (186) die letzte.

§. 189. *Zusatz.* Wenn $a : b = c : d$
und $f : b = c : k$
so ist $a : f = k : d$

denn man kann die zweyte Proportion in folgende verändern: $b : f = k : c$, woraus nach (187) die letzte folgt.

§. 190. *Zusatz.* Wenn in zwey Proportionen der Exponent einerley ist, so kann man ih-

re Glieder nach der Ordnung addiren und subtrahiren, die Summen und Unterschiede machen wiederum eine Proportion.

$$\begin{array}{lcl} \text{Wenn} & a : ae = & c : ce \\ \text{und} & f : fe = & h : he \\ \hline \text{so ist} & a + f : (a + f)e = & c + h : (c + h)e. \end{array}$$

Die Richtigkeit fällt in der letzten Proportion in die Augen.

§. 191. *Erklärung.* Eine *zusammengesetzte* Verhältniss ist eine solche, wo die beyden Glieder nicht unmittelbar mit einander verglichen werden, z. B. wenn man zwey Verhältnisse $a:b$ und $b:c$ hat, sie mögen gleich oder ungleich seyn, so nennt man die Verhältniss $a:c$ aus $a:b$ und $b:c$ zusammengesetzt. Die Glieder a und c werden nicht unmittelbar, sondern beyde mit b verglichen.

§. 192. *Lehrsatz.* Die Verhältniss zweyer Producte ist aus den Verhältnissen der Factoren zusammengesetzt, z. B. $ab:cd = (a:c) + (b:d)$.

Beweis. Man verwandle die Verhältniss $b:d$ in eine andere, deren erstes Glied c ist: $b:d = c:\frac{cd}{b}$ und nenne $\frac{cd}{b} = f$, also $b:d = c:f$.

Nun ist $a : c = a : c$

$b : d = c : f$

also $ab : cd = ac : cf = a : f$ (186).

Aber die Verhältniss $a : f$ ist nach (191) aus $a : c$ und $c : f$ zusammengesetzt, mithin auch aus $a : c$ und $b : d$, weil die Verhältnisse $c : f$ und $b : d$ gleich sind.

Exempel. $5 . 6 : 10 . 18 = (5 : 10) + (6 : 18)$

§. 193. *Zusatz.* Der Exponent der zusammengesetzten Verhältniss ist das Product aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse, woraus jene entstanden ist. Im Exempel (192) ist der Exponent der zusammengesetzten Verhältniss $= \frac{180}{30} = 6$. Die Exponenten der beyden einfachen, aber $\frac{180}{5} = 2$ und $\frac{18}{6} = 3$.

§. 194. *Anmerkung.* Verhältnisse und Quotienten sind nicht einerley, man würde hier irren, wenn man den Ausdruck $ab : cd = (a : c) + (b : d)$ so verstehen wollte, dass $\frac{cd}{ab}$ und $\frac{c}{a} + \frac{d}{b}$ gleich wären.

§. 195. *Zusatz.* Der Satz (192) gilt, auch wenn die Producte aus drey und mehreren Factoren bestehen.

§. 196. *Anmerkung.* Anwendungen der Sätze von Zusammensetzung der Proportionen

kommen in der praktischen Rechenkunst häufig vor. So verhalten sich zum Beyspiel Wirkungen wie die Producte aus den Ursachen in die Zeiten oder die Verhältniss der Wirkungen ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Ursachen und der Zeiten. Diese Art von Rechnungen wird in der bürgerlichen Rechenkunst *Regula quinque*, *regula septem* genannt, und eine vortheilhafte Methode solche Exempel anzusetzen ist die *Reesische Regel*.

Die *Kettenregel* ist ebenfalls eine Anwendung des Obigen, die in vielen, zumal Kaufmännischen Rechnungen bey Vergleichen von Münzen, Geldcurs, Wechselcurs, Maassen, Gewichten u. dgl. sehr nützlich ist.

§. 197. *Anmerkung.* Euklid handelt von Proportionen bey stetigen Grössen und Zahlen im fünften, siebenten und achten Buche der Elemente.

Arithmetische Progression.

§. 198. *Erklärung.* Eine *arithmetische Progression* ist eine Reihe von Zahlen, welche in zusammenhängenden und gleichen arithmetischen Verhältnissen fortgehen oder wo jede drey auf einander folgende Glieder eine stetige arithmetische Proportion ausmachen.

§. 199. *Erklärung.* Wenn die Glieder vom ersten an gerechnet um einen gewissen Unter-

schied grösser werden, so ist es eine *steigende* Progression, wenn sie kleiner werden, eine *fallende*.

Beyspiel einer steigenden Reihe:

3|5|7|9|11|13| u. s. f. wo der Unterschied = 2.

Beyspiel einer fallenden Reihe:

12|9|6|3|0 u. s. f. wo der Unterschied = 3.

§. 200. *Zusatz*. Wenn man in einer fallenden Reihe immer weiter fortgeht, so werden die Glieder endlich *negativ*, z. B. die fallende Reihe in (199) fortgesetzt würde folgende seyn:

12|9|6|3|0|—3|—6|—9|—12| u. s. w.

Eben so wenn man in einer steigenden Reihe rückwärts geht.

§. 201. *Zusatz*. Wenn a das erste Glied, d den Unterschied der Glieder bedeutet, der zu dem vorigen Glied *addirt* das folgende giebt, so ist d bey einer steigenden Reihe *positiv*, bey einer fallenden *negativ*.

§. 202. *Zusatz*. Man kann also überhaupt jede sowohl steigende als fallende arithmetische Reihe unter folgender allgemeiner Form darstellen.

$a|a|+d|a+2d|a+3d|a+4d|$ u. s. w.

§. 203. *Erklärung.* Die Zahl, welche anzeigt, das *wievielste* Glied, vom ersten an gerechnet, irgend ein Glied der Progression sey, soll der *Index* dieses Gliedes heissen.

§. 204. *Lehrsatz.* Jedes Glied einer arithmetischen Progression entsteht, wenn der Unterschied der Glieder mit dem Index weniger eins multiplicirt, zum ersten Gliede addirt wird.

Beweis erhellet aus der allgemeinen Form der Reihe (202). Das zweyte Glied ist $a + d$, das dritte $a + 2d$, das vierte $a + 3d$ und da dieses nach eben dem Gesetze fortgeht, so ist jedes beliebige mte Glied $= a + (m - 1)d$.

§. 205. *Aufgabe.* Aus der Anzahl der Glieder dem ersten Gliede und dem Unterschiede der Glieder das letzte Glied zu finden.

Auflösung. Es sey das letzte Glied $= u$, die Anzahl der Glieder $= n$, so ist nach (204) $u = a + (n - 1)d$.

Exempel. Das erste Glied sey 1, der Unterschied 2, die Anzahl der Glieder 100, so ist das letzte Glied $= 1 + 99 \cdot 2 = 199$, die hundertste ungerade Zahl und die Reihe wäre:

1 | 3 | 5 | 7 | 9 | | 199 |.

§. 206. *Anmerkung.* In der praktischen Rechenkunst kommen Exempel von dieser und

der folgenden Aufgabe vor. Wenn z. B. ein Brunnen ausgegraben wird, so wird die Beschwerde der Arbeit immer grösser je tiefer man gräbt, mithin muss auch der Lohn in eben dem Maasse wachsen. Doch kann dieses Zunehmen auch nach einem andern Gesetze geschehen als nach arithmetischer Progression. S. Kästners Fortsetz. der Rechenkunst. VIII. 18-21.

§. 207. *Aufgabe. Die Summen jedes Paares vom Anfang und Ende der Progression gleich entfernten Glieder, welche Kürze halber zusammengehörige Glieder heissen mögen, sind einander gleich, nemlich jede so gross als die Summe des ersten und letzten Gliedes.*

Beweis. Die Summe des ersten und letzten Gliedes sey $= a + u$. Nun ist das zweyte Glied vom Anfange $= a + d$ und das zweyte Glied vom Ende $= u - d$, also beyder Summe $= a + d + u - d = a + u$. So ist ferner das dritte Glied vom Anfange $= a + 2d$ und das dritte Glied vom Ende $= u - 2d$, also beyder Summe $= a + 2d + u - 2d = a + u$. Allgemein das mte Glied vom Anfange und das mte vom Ende, zusammen $= a + (m-1)d + u - (m-1)d = a + u = 2a + (n-1)d$ (205).

§. 208. *Zusatz.* Wenn die Progression eine ungerade Anzahl Glieder hat, so giebt es ein mittelstes Glied. Dieses ist doppelt genommen $= a + u$, denn es sey das mte Glied vom Anfange, so ist es auch das mte vom Ende. Es

mag g heissen, so ist also $g = a + (m-1)d$,
aber auch $g = u - (m-1)d$, also $2g = a + u$.

§. 209. *Aufgabe.* Wenn das erste und letzte Glied und die Anzahl der Glieder gegeben sind, die Summe der ganzen Progression zu finden.

Auflösung. Man addire das erste und letzte Glied und multiplicire deren Summe mit der halben Anzahl der Glieder.

Beweis. Wenn die Anzahl der Glieder gerade ist, so machen die Summen aller Paare zusammengehöriger Glieder die Summe der ganzen Progression aus. Ist die Anzahl der Glieder $= n$, so ist die Anzahl der Paare $= \frac{n}{2}$ und die Summe jedes Paares $= a + u$, also die Summe der Progression, welche s heissen mag, $= \frac{n}{2} (a + u)$.

Ist n ungerade, so lassen sich nur $\frac{n-1}{2}$ Paare zusammengehöriger Glieder nehmen, deren Summen $= \frac{(n-1) \cdot (a+u)}{2}$ ist; hiezu kommt dann noch das mittelste Glied $g = \frac{a+u}{2}$.

Also auch hier die Summe der ganzen Progres-

$$\text{summe } s = \frac{(n-1) \cdot (a+u)}{2} + \frac{a+u}{2} = \frac{n \cdot (a+u)}{2}$$

wie vorhin.

Exempel. Die Summe der ersten hundert ungeraden Zahlen ist $= \frac{100 \cdot (199 + 1)}{2} =$

$$100 \cdot 100 = 10000.$$

§. 210. *Anmerkung.* Die Formeln für das letzte Glied (205) und für die Summe (209) liegen bey allen übrigen Aufgaben zum Grunde, welche bey der arithmetischen Progression vorkommen können. Eine ausführliche Abhandlung würde hier zu viel Platz einnehmen, auch lassen sich nicht einmal alle Auflösungen aus dem Bisherigen hinlänglich erläutern. Es giebt fünf Stücke bey der arithmetischen Progression zu bemerken, nemlich: das *erste Glied*, das *letzte Glied*, die *Anzahl der Glieder*, der *Unterschied der Glieder* und die *Summe der ganzen Progression*. Wenn von diesen Dingen drey gegeben sind, so lassen sich die übrigen beyden daraus finden. Dies giebt zwanzig verschiedene Aufgaben, je nachdem man die gegebenen und gesuchten Grössen combinirt. Hier müssen wir uns begnügen die beyden erwähnten Fundamentalformeln gezeigt zu haben.

Geometrische Progression.

§. 211. *Erklärung.* Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, welche in zusammenhängenden geometrischen Verhältnissen fortgehen oder wo jede drey auf einander folgende Glieder eine stetige geometrische Proportion ausmachen. *Exponent* heisst hier wie bey den Proportionen die Zahl, womit jedes vorhergehende Glied multiplicirt werden muss, um das folgende zu machen.

§. 212. *Erklärung.* Wenn die Glieder der Progression, vom ersten an gerechnet, grösser werden, so ist es eine *steigende*, wenn die Glieder kleiner werden, so ist es eine *fallende* Reihe.

Beyspiel einer steigenden Reihe:

2|6|18|54|162|486|... wo der *Exponent* = 3

Beyspiel einer fallenden Reihe:

32|16|8|4|2|1|.. wo der *Exponent* = $\frac{1}{2}$.

§. 213. *Zusatz.* Eine geometrische Reihe kann nicht mit 0 anfangen, weil sonst alle Glieder = 0 werden müssten, und überhaupt kann kein Glied derselben = 0 seyn, ohne dass alle Glieder = 0 würden.

§. 214. *Zusatz.* Wenn man eine fallende geometrische Reihe immer weiter fortsetzt, so kommt man auf eigentliche Brüche (nicht aber

auf negative Zahlen wie bey der arithmetischen Reihe), z. B. die fallende Reihe (212) fortgesetzt gäbe folgende:

$$32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | \frac{1}{2} | \frac{1}{4} | \frac{1}{8} | \frac{1}{16} | \frac{1}{32} | \dots$$

Eben so wenn man in der steigenden Reihe rückwärts geht.

§. 215. *Zusatz.* Wenn a das erste Glied, e den Exponenten bedeutet, der also bey der steigenden Reihe eine ganze Zahl oder uneigentlicher Bruch, bey der fallenden aber ein eigentlicher Bruch ist, so lässt sich sowohl die steigende als die fallende geometrische Progression unter folgender allgemeiner Form darstellen:

$$a | ae | ae^2 | ae^3 | ae^4 | ae^5 | \text{ u. s. w. }$$

§. 216. *Lehrsatz.* Jedes Glied einer geometrischen Progression entsteht, wenn das erste Glied mit einer Potenz des Exponenten multiplicirt wird, die um einen Grad niedriger ist, als der Index des Gliedes angiebt.

Beweis erhellet aus der allgemeinen Form der Progression (215). Beym zweyten Gliede wird a mit e multiplicirt, beym dritten mit e^2 , beym vierten mit e^3 u. s. w. Und da nun dieses nach eben dem Gesetze fortgeht, so ist jedes beliebige mte Glied $\equiv ae^{m-1}$, welches also der allgemeine Ausdruck für irgend ein Glied einer geometrischen Progression ist.

§. 217. *Aufgabe.* Aus der Anzahl der Glieder, dem ersten Gliede und dem Verhältnisszeiger (Exponent) das letzte Glied zu finden.

Auflösung. Man erhebe den Exponenten der Progression auf eine Potenz, deren Exponent der Anzahl der Glieder weniger eins gleich ist. Es sey die Anzahl der Glieder $= n$, das letzte Glied $= u$, so ist nach (216) $u = ae^{n-1}$.

Exempel. Das erste Glied sey $= 2$, der Exponent der Progression $= 3$, die Anzahl der Glieder $= 6$, so ist das letzte Glied $= 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 243 = 486$.

§. 218. *Anmerkung.* Wenn n eine grosse Zahl ist, so kann diese Auflösung beschwerlich werden. Eine bequemere wird in der Folge gezeigt werden.

§. 219. *Lehrsatz.* Die Producte jedes Paares vom Anfange und Ende der Progression gleich entfernter Glieder sind einander gleich, jedes nämlich so gross als das Product des ersten und letzten Gliedes

Beweis. Das Product des ersten und letzten Gliedes ist $= au = aae^{n-1}$. Nun ist das zweyte Glied vom Anfange $= ae$, das zweyte vom Ende $= \frac{u}{e} = ae^{n-2}$, beyder Product $= ae \cdot ae^{n-2} = aae^{n-1} = au$ und so bey den übrigen.

§. 220. *Zusatz.* Wenn die Anzahl der Glieder ungerade ist, so ist das Quadrat des mittlsten Gliedes dem Product der beyden äussersten Glieder gleich.

§. 221. *Aufgabe.* Die Summe einer geometrischen Progression zu finden, deren erstes und letztes Glied und Exponent gegeben sind.

Auflösung. Die Summe sey $= s$, so ist

$$\begin{array}{l} s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + u \\ es = ae + ae^2 + ae^3 + \dots + u + ue \\ \hline \text{folg-} \\ \text{lich} (e-1)s = ue - a : \text{(die obere Reihe von der untern ab-} \\ \hspace{15em} \text{gezogen.)} \\ \text{und} \quad s = \frac{ue - a}{e - 1} \end{array}$$

Exempel. $a = 5$; $u = 327680$; $e = 4$;
so ist $s = \frac{327680 \cdot 4 - 5}{3} = 436905$.

§. 222. *Anmerkung.* Die Formeln (217 und 221) sind die beyden Fundamentalformeln der geometrischen Progression, übrigens gilt auch hier was (210) von den arithmetischen Reihen bemerkt ist, daher wir uns hier bloss auf die beyden erwähnten Formeln einschränken.

§. 223. *Zusatz.* Wenn man in einer geometrischen Reihe von Brüchen wie (214) immer weiter fortgeht, so werden die Glieder immer kleiner und kleiner und man kann sich die Reihe soweit fortgesetzt denken, dass ihr letztes

Glied eine ganz unbeträchtliche Grösse hat und als $= 0$ angesehen werden kann. Wenn das erste Glied dem Verhältnisszeiger gleich und der Zähler in beyden und folglich in allen Gliedern $= 1$ ist, so findet sich die Summe einer solchen unendlichen Reihe bloss dadurch, dass man den Nenner des ersten Gliedes um 1 vermindert. Denn weil $u = 0$ und $a = e$, so ist

$$\text{hier } s = \frac{ue - a}{e - 1} = \frac{-a}{a - 1} = \frac{a}{1 - a} = a \cdot \frac{1}{1 - a}$$

$$\text{Nun sey } a = \frac{1}{x} \text{ also } s = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x - 1}.$$

Exempel.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots &= 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \dots &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Logarithmen.

§. 224. *Erklärung.* Logarithme nennt man die Zahl, welche angiebt wie viel Verhältnisse vom ersten bis zu irgend einem beliebigen Gliede einer geometrischen Progression sind, daher auch der Name (*αριθμος λογων*).

z. B. für die Reihe $a | ae | ae^2 | ae^3 | ae^4 | \dots$
sind die Logarithmen $0 | 1 | 2 | 3 | 4 | \dots$

§. 225. *Zusatz.* Setzt man die Reihe rückwärts fort, so kann man die Verhältnisse von dem Gliede, dessen Logarithme 0 ist, zu den kleinern, *negative* Verhältnisse nennen, wenn man die vorigen *positive* nennt. Die Logarithmen dieser kleinern Glieder würden mithin auch negativ, z. B.

Progression	$\frac{a}{e^4}$	$\frac{a}{e^3}$	$\frac{a}{e^2}$	$\frac{a}{e}$	a
Logarithmen	— 4	— 3	— 2	— 1	0

§. 226. *Zusatz.* Es ist klar, dass die Logarithmen mit dem *Exponenten* der Potenz des Verhältnisszeigers gleich sind. Setzt man das erste Glied der Progression $= 1$, so bestehen alle Glieder bloss aus Potenzen des Verhältnisszeigers, z. B.

Progr.....	e^{-5}	e^{-4}	e^{-3}	e^{-2}	e^{-1}	1	e	e^2	e^3	e^4	e^5	
Logar.....	— 5	— 4	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5	

§. 227. *Zusatz.* Was für ein Logarithme zu irgend einer Zahl in einer geometrischen Reihe gehöre, hängt also davon ab, zu welcher Zahl die Logarithme $= 1$ gehöre, oder welches einerley ist, es hängt davon ab, welches Verhältniss als *Grundverhältniss* angenommen ist, z. B. in (226) die Verhältniss $1 : e$, woraus die übrigen Verhältnisse, z. B. $1 : e^2$ und $1 : e^3$ und $1 : e^{-2}$ u. s. w. zusammengesetzt sind.

§. 228. *Erklärung.* Eine geometrische Reihe mit ihrer Logarithmen Reihe zusammenge-
nommen heisst ein *logarithmisches System*. Das
Glieder der geometrischen Reihe, deren Loga-
rithme 1 ist, heisst die *Grundzahl* oder *Basis*
des Systems.

§. 229. *Lehrsatz.* Der Logarithme eines
Products zweyer Glieder der geometrischen Rei-
he ist gleich der Summe der Logarithmen bey-
der Factoren.

Beweis. Es ist z. B. $e \cdot e^3 = e^4$ und der Lo-
garithme von e^4 ist $= 4 = 1 + 3$. So auch
allgemein $e^m \cdot e^n = e^{m+n}$ und $\log. e^{m+n} =$
 $m + n$ (226),

§. 230. *Zusatz.* Der Logarithme einer Po-
tenz ist gleich dem Logarithmen der Wurzel
multiplicirt durch den Exponenten der Potenz,
denn es ist z. B. $\log. e^4 = \log. e \cdot e \cdot e \cdot e = \log.$
 $e + \log. e + \log. e + \log. e = 4 \log. e$. Dies
giebt die in (218) erwähnte bequemere Art das
letzte Glied einer geometrischen Reihe zu fin-
den. $\log. u = \log. a + (n - 1) \log. e$.

Der Logarithme einer Wurzel ist gleich dem
Logarithmen der Zahl selbst durch den Expo-
nenten des Wurzelzeichens dividirt. So ist z. B.

$$\log. \sqrt[4]{e} = \log e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \log. e = \frac{\log. e}{4}.$$

§. 231. *Lehrsatz.* Der Logarithme eines Quotienten ist gleich dem Unterschiede der Logarithmen des Dividendus und Divisors.

Beweis. Es ist $\frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$ und folglich $\log.$

$$\frac{e^m}{e^n} = \log. e^{m-n} = m-n = \log. e^m - \log. e^n$$

§. 232. *Anmerkung.* Aus (229 bis 231) erhellet, dass man durch Logarithmen die Rechnung mit den Gliedern einer geometrischen Reihe sehr abkürzen könne, wenn man einmal ein logarithmisches System verfertigt hat, da man anstatt die Glieder zu multipliciren oder zu dividiren bloss die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren braucht. Diese Bequemlichkeit hat veranlasst, dass man Logarithmen für alle Zahlen von 1 bis 10000 oder auch noch weiter berechnet hat, indem man Glieder einer geometrischen Reihe suchte, die von den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. wenig abwichen, deren Logarithmen folglich für Logarithmen dieser natürlichen Zahlen angenommen werden konnten.

§. 233. *Zusatz.* Da $1:re = re:e$, so kann die Verhältniss $1:e$ als aus zwey gleichen Verhältnissen $1:re$ und $re:e$ zusammengesetzt angesehen werden, oder welches eben das sagt: man kann die Verhältniss $1:e$ in zwey andre gleiche Verhältnisse $1:re$ und $re:e$ theilen.

Nennt man nun $1 : e$ eine *ganze* Verhältniss, so ist $1 : \sqrt{e}$ die *halbe* Verhältniss, oder ist der Logarithme von $e = 1$, so ist der Logarithme von $\sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

§. 234. *Zusatz.* Wiederum kann man die Verhältniss $1 : \sqrt{e}$ halbiren, indem man zwischen beyden die mittlere stete Proportionalzahl sucht, welche $= \sqrt[4]{e} = e^{\frac{1}{4}}$ und deren Logarithme folglich $= \frac{1}{4}$ seyn würde. Diese Verhältniss $1 : \sqrt[4]{e}$ ist nemlich am Viertel der Grundverhältniss $1 : e$. Eben so kann auch die Verhältniss $\sqrt{e} : e$ oder $e^{\frac{1}{2}} : e$ halbt werden, die mittlere Proportionalzahl ist $= e^{\frac{3}{4}}$ ihr Logarithme $= \frac{3}{4}$.

§. 235. *Zusatz.* So kann man also zwischen die Glieder einer geometrischen Reihe so viel man will neue Glieder einschieben (*interpoliren*) wodurch man denn solche Glieder erhalten wird, die wenig von den natürlichen Zahlen unterschieden sind.

§. 236. *Anmerkung.* Das Bisherige zeigt wie Logarithmen der natürlichen Zahlenreihe berechnet werden konnten, auch sind diejenigen, welche wir gebrauchen, wirklich nach dieser Methode berechnet worden, ob sie gleich sehr mühsam ist. Leichtere Methoden hat man durch Hülfe der höhern Mathematik gefunden.

Logarithmen zusammengesetzter Zahlen werden leicht durch Addition gefunden, wenn man die Logarithmen der Primzahlen hat. — Weitere Ausführung dieser Lehre in *Karstens Lehrbegr. Algebr.* 6 und 7. Abschn. auch in *ebendesselben Auszuge* in der ebenen Trigonometrie.

§. 237. *Anmerkung.* Die Erfindung der Logarithmen wird dem Schottländer *Johann Nepper*, Baron von Merchiston, gemeiniglich zugeschrieben, wenigstens hat er sich um ihre Einführung verdient gemacht. Aber *Justus Byrgius* oder *Jobst Burgi*, ein Schweizer ist früher als Nepper auf die Erfindung gerathen, von dessen *arithmetischen und geometrischen Progressstabulen*, Prag 1620, man interessante Nachricht findet in *Kästners Fortsetzung der Rechenkunst* p. 93. f. S. auch *Scheibels* Einleitung zur mathemat. Bücherkenntniss X. p. 444.

Byrgs und Neppers Logarithmen waren aber von anderer Art als die jetzt gebräuchlichen, welches wir hier nur andeuten dürfen. Die jetzt gebräuchlichen sind von *Henrich Briggs*, daher sie auch die *Briggischen* Logarithmen heissen. Mehrere historische Nachrichten findet man in *Kästners Fortsetzung der Rechenkunst* S. 79. ff. *ebendesselben* astronom. Abhandl. II. Samml. 4 Abhandl.

§. 238. *Anmerkung.* In den *Briggischen* Logarithmensystem ist die Basis 10. Es liegt also dabey zum Grunde:

die Hauptreihe 1.... 10.... 100.... 1000.... 10000 u. s. w.
 deren Logar. 0.... 1.... 2.... 3.... 4 u. s. w.

Von allen Zahlen, welche zwischen diese Glieder der Progression fallen, d. h. welche nicht Potenzen der 10 sind, finden sich die Logarithmen nicht vollständig in den Tafeln, sondern sie sind *Brüche*, welche bis auf sieben oder in grössern Tafeln auch auf mehrere Decimalstellen hinter dem Einercomma berechnet sind. Die ganze Zahl des Logarithmen heisst die *Kennziffer* (*figura characteristica*), das Übrige *mantissa*.

§. 239. *Anmerkung.* Was den Gebrauch der Logarithmen betrifft, so ist derselbe der Hauptsache nach aus (229 bis 232) klar; nur sind hier noch ein Paar Kunstgriffe zu zeigen, die anzuwenden sind, wenn Zahlen oder Logarithmen vorkommen, welche nicht in den Tafeln stehen.

§. 240. *Zusatz.* Logarithmen von Ganzen mit Decimalbrüchen ergeben sich, wenn die Anzahl der Ziffern nicht über vier beträgt, aus den gewöhnlichen Tafeln, ob sie gleich nicht eigentlich darin stehen, bloss durch Veränderung der Kennziffer. Ein Exempel wird dies deutlich machen: Man soll den Logarithmus von 8,74 finden. Zu dem Ende schlägt man auf den Logarithmen von $874 = 2,9415114$. Nun aber ist aus (238) klar, dass die Kennziffer eines Lo-

garithmen des *Briggischen* Systems immer mit dem Exponenten der Ordnung einerley ist, welcher der höchsten Ziffer der Zahl zugehört, z. B. bey allen Zahlen von 100 an bis 1000, deren höchste Ziffer Hunderter oder von der Ordnung 2 sind, ist die Kennziffer der Logarithmen auch 2 und so bey den übrigen. Mithin erhält man $\log. 8,74 = 0,9415114$.

§. 241. *Zusatz.* Auf eben diese Art werden auch Logarithmen von blossen Decimalbrüchen gefunden. Es erhellet, dass hier die Kennziffer negativ werden müsse, weil der Exponent der Ordnung, welchen die höchste Ziffer haben kann, negativ ist, (112) wie denn überhaupt Logarithmen von eigentlichen Brüchen negativ seyn müssen, wenn $\log. 1 = 0$ gesetzt wird, wie im *Briggischen* System geschieht, (226). So ist demnach $\log. 0,874 = \log. \frac{874}{1000} = \log. 874 - \log. 1000 = 2,9415114 - 3 = 0,9415114 - 1$. Man hängt hier die Kennziffer $- 1$ lieber hinten an, weil man, wenn sie vorn in die gewöhnliche Stelle der Kennziffer gesetzt würde, den übrigen Theil des Logarithmen auch für negativ halten könnte, welches er aber *nicht* ist. *) Der ganz negative Logarithme von obiger Zahl würde vielmehr seyn $= - 0,0584885$; aber negative Logarithmen

*) H. v. Segner setzt indessen die negative Kennziffer auch vorn in die gewöhnliche Stelle.

findet man in keiner Tafel, auch wären sie ganz unnöthig, da man auf die eben gezeigte Art mit positiven auskommen kann.

§. 242. *Zusatz.* Bey einigem Nachdenken erhellet, dass in den Tafeln, die bis 10000 gehen, wie z. B. in den gewöhnlichen Vlacqischen oder Wolfischen, nur die eine *Classe* von 1000 bis 10000 nöthig wäre. Die vorhergehenden drey Classen: 1 bis 10 und 10 bis 100 und 100 bis 1000, sind überflüssig; denn die Zahlen, die in diesen drey ersten Classen vorkommen, findet man, nur in höherer Ordnung, auch in der letzten und grössten Classe, wo man sie also aufschlagen kann und nur die Kennziffer zu verändern braucht, z. B. $\log. 874 = 2,9415114$ kann auch in der letzten Classe aufgeschlagen werden, wo man findet $\log. 8740 = 3,9415114$, dessen Kennziffer man nur um 1 zu vermindern braucht. Wenn also nicht in anderer Hinsicht (wie etwa in den *Segnerschen* kleinen Tafeln) die niedrigern Classen mit hingesezt werden, so kann man viel Raum ersparen, und diesen Vortheil hat man in neuern Tafeln, z. B. den *Schulzischen*, benutzt.

§. 243. *Zusatz.* Die Kennziffer selbst ist auch überflüssig, denn man weiss schon aus der Zahl, deren Logarithmen man sucht, welche Kennziffer letzterer haben müsse, und wenn ein Logarithme gegeben ist, zu dem die zugehörige Zahl gesucht wird, so liegt nichts daran, ob

die Kennziffer in den Tafeln stehe oder nicht; denn die Kennziffer des *gegebenen* Logarithmen bestimmt schon die Ordnung der höchsten Ziffer der gesuchten Zahl.

§. 244. *Zusatz.* Um vorkommende Logarithmen mit kleinen Kennziffern, z. B. 0, 1, 2, und die dazu gehörigen Zahlen genauer zu finden, als sie vielleicht unter diesen Kennziffern stehen, muss man sie unter der grössten Kennziffer, also in den gemeinen Tafeln unter der Kennziffer 3 aufschlagen. Gesetzt, es wäre gegeben der Logarithme 0,9412133. Um nun die dazu gehörige Zahl zu finden, hätte man die nächsten Logarithmen wie folgt:

Unter der Kennziffer 0
den Logarithm.

$$0,9572425 = \log. 9$$

Unter der Kennziffer 1
den Logarithm.

$$1,9444827 = \log. 88$$

Unter der Kennziffer 2
den Logarithm.

$$2,9415114 = \log. 874$$

Unter der Kennziffer 3
den Logarithm.

$$3,9412132 = \log. 8734$$

Die gesuchte Zahl fände sich aus dem ersten $= 9$, aus dem zweyten mit veränderter Kennziffer $= 8,8$, aus dem dritten $= 8,74$, aus dem letzten $= 8,734$. Die erstern also beträchtlich zu gross, die letzte am genauesten und wenigstens nicht über $\frac{1}{1000}$ falsch.

§. 245. *Zusatz.* Da die gemeinen Tafeln nur bis 10000 gehen, so enthalten sie keine

Logarithmen von Zahlen, die mehr als vier Ziffern haben (den einzigen letzten Logarithmen von 10000 ausgenommen). Indessen kann man doch durch Hülfe derselben auch Logarithmen mehrzifferichter Zahlen finden, wozu zuvörderst die Zerfällung einer grossen Zahl in ihre Factoren dient, da man denn die Logarithmen der Factoren addirt. So ist z. B. $\log. 29436 = \log. 4 \cdot 7359 = \log. 4 + \log. 7359 = 0,6020600 + 3,8668188 = 4,4688788$.

§. 246. *Zusatz.* Eine andere Methode zu Zahlen von mehr als vier Ziffern die Logarithmen zu finden, ist die Rechnung mit den Unterschieden, oder wie man es auch nennt, mit *Proportionaltheilen*. Diese gründet sich darauf: dass *Änderungen der Zahlen, welche in Vergleichung mit den Zahlen selbst nur klein sind, sich ziemlich nahe wie die Änderungen der zugehörigen Logarithmen verhalten*. Hier- von kann man sich durch Erfahrung bey den Zahlen der Classe von 1000 bis 10000 überzeugen. Je näher an 10000 desto besser trifft es zu, denn desto geringer ist die jedesmalige Änderung, nemlich 1, gegen die Zahlen selbst, hingegen bey den niedrigern Classen findet es schon nicht Statt. Ausführlichere Betrachtungen über das Gesetz, nach welchem sich Zahlen und ihre Logarithmen ändern, lassen sich hier nicht beybringen.

§. 247. *Zusatz.* Durch diese Methode kann man nun zu einer Zahl von fünf, sechs, auch allenfalls noch von sieben Ziffern den zugehörigen Logarithmen vermittelt der gemeinen Tafeln finden, z. B. man sucht $\log. 5753,83$, so ist die Rechnung folgende:

Nächstgrössere Zahl der Tafeln	$\equiv 5754$
Nächstkleinere Zahl der Tafeln	$\equiv 5753$
Differenz	$\equiv 1$
Gegebene Zahl	$\equiv 5754,83$
Nächstkleinere Zahl	$\equiv 5753,$
Differenz	$\equiv 0,83$
Logar. d. nächstgröss. Zahl d. i. log. 5754	$\equiv 3,7599699$
Logar. d. nächstklein. Zahl d. i. log. 5753	$\equiv 3,7598944$
Differenz	$\equiv 755$

Nun schliesst man nach der Regel de tri:

$$1 : 0,83 \equiv 555 : \text{Differ. d. Logar. d. nächstkl. Zahl und des gesuchten Logarithmen.}$$

Diese Differenz ist folglich $\equiv 755 \cdot 0,83 \equiv 626$. Um so viel ist der gesuchte Logarithme grösser als der nächstkleinere, also findet sich der gesuchte Logarithme,

wenn man zum log. 5753	$\equiv 3,7598944$
addirt	$\equiv 626$
log. 5753,83	$\equiv 3,7599570$

§. 248. *Zusatz.* Ob die Zahl im vorigen Absatz $\equiv 5753,83$, oder $\equiv 57538,3$, oder $\equiv 575383$, oder auch $\equiv 575,383$ ist; kurz, an welchem Orte das Einercomma steht, das

mächt in den Logarithmen keine Änderung ausser in der Kennziffer, also kann man auf die gezeigte Art überhaupt Logarithmen von fünf-, sechs- und siebenzifferichten Zahlen finden, von welcher Ordnung auch ihre höchste Ziffer sey.

§. 249. *Zusatz.* Das umgekehrte Verfahren giebt ein Mittel ab, um zu einem vorkommenden Logarithmen, welcher nicht in den Tafeln stehet, die zugehörige Zahl zu finden, z. B. man hat in einer Rechnung einen Logarithmen $\equiv 3,8731597$, so findet man aus den Tafeln den

Nächstgrössern Logarithmen, $\log. 7468 \equiv 3,8732043$

Nächstkleinern Logarithmen, $\log. 7467 \equiv 3,8731461$

Differenz $\equiv 582$

Gegebener Logarithme, $\log. x \equiv 3,8731597$

Nächstkleinere Logarithme, $\log. 7467 \equiv 3,8731461$

Differenz $\equiv 136$

Zahl des nächstgrössern Logarithmen $\equiv 7468$

Zahl des nächstkleinern Logarithmen $\equiv 7467$

Differenz $\equiv 1$

Nun setzt man nach der Regel de tri auf:

$582 : 136 \equiv 1 : \text{Differenz der nächstkleinern und der gesuchten Zahl.}$

Diese Differenz ist also $\equiv \frac{1}{5} \frac{3}{8} \frac{6}{2} \equiv 0,23 \dots$

Um so viel ist die gesuchte Zahl grösser als die nächstkleinere, mithin ist $x \equiv 7464 + 0,23 \equiv 7467,23 \dots$

§. 250. *Zusatz.* Man könnte zwar die Differenz $0,23 \dots$ auf mehr Decimalstellen berech-

nen, allein die folgenden Stellen würden weniger richtig werden, weil der Satz (146) überhaupt nur *beynahe* wahr ist, und dann, weil die Logarithmen der gemeinen Tafeln nur bis auf sieben Stellen berechnet sind, genauere, bis auf mehr Stellen berechnete Logarithme aber andere Differenzen geben würden.

§. 251. *Zusatz.* Da bey veränderter Kennziffer des Logarithmen nur die *Ordnung* der zugehörigen Zahl verändert wird, so erhellet, dass man auf die gezeigte Art auch die zugehörige Zahl fände, wenn der Log. x in (149) eine andere Kennziffer hätte.

Wir fanden oben $3,8731597 = \log. 7467,23 \dots$
 eben so fände man $2,8731597 = \log. 746,723 \dots$
 oder auch $4,8731597 = \log. 74672,3 \dots$
 oder $5,8731597 = \log. 746723, \dots$

§. 252. *Zusatz.* Zum Behuf dieser Rechnungen ist es bequem, wenn in den Logarithmentafeln in der höchsten Classe die Unterschiede von je zwey benachbarten Logarithmen anmerkt sind, wie deshalb auch in neuern Ausgaben von Logarithmentafeln geschehen ist, z. B. in den *Schulzischen*. Über die in den letzten Zusätzen gelehrtten Kunstgriffe lese man einen Aufsatz am Ende der *Segnerschen Anfangsgr.* und *Karstens Lehrbegr.* II. Th. VII. Abschn.

GEOMETRIE.

G. E. O. M. L. T. R. I.

Grundbegriffe der ebenen Geometrie.

§. 1.

Erklärung.

Alle *Körper* werden von *Flächen*, alle *Flächen* werden von *Linien* und alle *Linien* werden von *Puncten* begränzt.

Der *Punct* ist die Gränze aller Ausdehnung, er ist im geometrischen Sinne Etwas Untheilbares und wird ohne alle Ausdehnung gedacht.

Die *Linie* ist eine Ausdehnung in die Länge ohne Breite und Dicke.

Die *Fläche* ist eine Ausdehnung in die Länge und Breite ohne Dicke.

Der *Körper* ist eine Ausdehnung in die Länge, Breite und Dicke.

§. 2. *Erklärung.* Eine *gerade Linie* ist eine solche, die immer in einerley Richtung fortgeht. Eine *krumme Linie* ist eine solche, die ihre Richtung in jedem *Puncte* verändert.

§. 3. *Grundsätze.* Zwischen zwey Puncten ist nur *eine* gerade Linie möglich. Hingegen lassen sich zwischen zwey Puncten unzählig viele krumme Linien ziehen. *Zwey gerade Linien können sich nicht mehr als einmal durchschneiden.*

§. 4. *Anmerkung.* Das ebenerwähnte Merkmal einer geraden Linie, dass nemlich zwischen zwey Puncten nur eine möglich sey, giebt das Mittel an die Hand ein richtiges Lineal zu verfertigen, d. h. ein Instrument, wodurch man gerade Linien zieht; wie auch ein Lineal zu prüfen, ob es richtig sey, indem es immer nur eine einzige Linie geben muss, man mag es an zwey Puncte anlegen, in welcher Lage man will.

§. 5. *Anmerkung.* *Wolf* erklärt die gerade Linie so: Es ist eine Linie, deren Theile der ganzen ähnlich sind. (Auszug Geometrie §. 7.) Andere übergehen die Erklärung derselben gänzlich als unnöthig. Wahr ist es, dass man die Genauigkeit in solchen Erklärungen leicht übertreiben kann, wenigstens für die Aufmerksamkeit der Anfänger.

Sonst könnte man in Hinsicht auf das oben erwähnte Merkmal die gerade Linie auch so erklären:

Wenn eine Fläche Fig. 6. A B C D irgendwo von einer Linie A B begränzt wird, sodann

ohne die Punkte A und B zu verrücken, die Fläche herumgelegt wird, so dass sie in die Lage A B E F kömmt, und die Linie A B in beyden Lagen vollkommen *einerley Ort einnimmt* (sich selbst *deckt*), so ist sie eine *gerade Linie*.

Hingegen wenn die Linie Fig. 7, 8 A B bey der zweyten Lage der Fläche nicht ihren vorigen Ort einnimmt, so ist es *keine gerade Linie*.

§. 6. *Foderungen*. Durch jede zwey gegebene Punkte eine gerade Linie zu ziehen und auf beyden Seiten nach Gefallen zu verlängern. Eine gerade Linie der andern gleich zu machen. Eine gerade Linie von einer andern grössern hinwegzunehmen.

§. 7. *Anmerkung*. Durch zwey gegebene Punkte wird die *Lage* einer geraden Linie bestimmt. Auf dem Papiere zieht man gerade Linien nach dem Lineal, zu längern Linien bedient man sich, wie es z. B. die Zimmerleute thun, einer ausgespannten, mit Kreide bestrichenen Schnur, auf dem Felde werden sie durch *Visiren* abgesteckt.

§. 8. *Erklärung*. Eine *Ebene* ist eine Fläche, worin man von jedem beliebigen Punkte zum andern gerade Linien ziehen kann.

Eine *krumme Fläche* ist eine solche, wo das eben Gesagte nicht Statt findet.

§. 9. *Zusatz.* Es kann wohl krumme Flächen geben, worin man nach irgend einer Richtung gerade Linien ziehen kann, aber nicht nach jeder beliebigen Richtung.

§. 10. *Erklärung.* Wenn zwey gerade Linien in einer Ebene gezogen, in einem Puncte zusammenlaufen, so heisst ihre *Neigung* gegen einander ein *ebener geradlinichter Winkel*, oder auch ohne weitem Zusatz ein *Winkel*, wenn man von keinen andern als ebenen und geradlinichten Winkeln zu reden hat.

Die beyden geraden Linien, welche den Winkel bilden, heissen die *Schenkel* des Winkels; der Punct, in welchen beyde Linien zusammenlaufen oder welchen sie gemeinschaftlich haben, heisst die *Spitze* oder der *Scheitel* des Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch einen am Scheitel gesetzten Buchstaben oder auch durch drey Buchstaben, wovon die zwey äussern in seinen Schenkeln, der mittelste am Scheitel stehen. Im Allgemeinen auch durch dieses Zeichen: $\angle$.

§. 11. *Zusatz.* Es kommt bey der Grösse eines Winkels gar nicht auf die Länge der Schenkel, sondern auf die Grösse der Neigung an.

§. 12. *Erklärung.* Wenn zwey gerade Linien in einer Ebene gezogen eine solche Lage

haben, dass sie nirgends zusammenstossen, auch nicht, wenn sie so weit man will auf jeder Seite verlängert werden, so heissen diese Linien *Parallellinien*. Man kann das Parallelseyn zweyer Linien durch dieses Zeichen $||$ andeuten.

Zwey gerade Linien, welche verlängert zusammenstossen würden, heissen *convergirende* Linien nach der Gegend hin, wo sie zusammenstossen würden; hingegen *divergirende* nach der entgegengesetzten Gegend.

§. 13. *Erklärung.* *Nebenwinkel* sind zwey solche Winkel, welche einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und deren beyde andere Schenkel in einer geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels liegen.

Eine gerade Linie steht auf eine andere gerade Linie *senkrecht*, wenn sie mit derselben zwey *gleiche* Nebenwinkel bildet. Jeder dieser gleichen Nebenwinkel heisst ein *rechter* Winkel. Ein rechter Winkel ist also ein solcher Winkel, der einen ihm gleichen Nebenwinkel hat oder haben kann. Ein Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, heisset ein *spitziger*; ein Winkel, welcher grösser ist als ein rechter, heisset ein *stumpfer* Winkel. Beyde Arten heissen auch *schiefe* Winkel.

§. 14. *Anmerkung.* Gewöhnlich wird der Erklärung des Winkels (§. 10.) die Einschränkung

kung beygefügt, dass beyde Schenkel nicht eine einzige gerade Linie ausmachen. Einige pflegen einen solchen Winkel einen *gestreckten* Winkel zu nennen.

§. 15. *Erklärung.* Das Wort *Figur* bedeutet hier im weitläufigern Sinne jede geometrische Zeichnung oder auch jede begränzte Ausdehnung; im engern Sinne aber versteht man darunter eine von Linien durchaus begränzte Fläche.

§. 16. *Erklärung.* Ein *Kreis* ist eine Figur, welche dadurch beschrieben wird, dass eine gerade Linie sich um ihren einen unverrückt bleibenden Endpunct *in einer Ebene* herumdreht, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kömmt.

Der eine feste Endpunct der geraden Linie, durch deren Herumführung der Kreis entsteht, heisst der *Mittelpunct* des Kreises; die krumme Linie, welche der andere Endpunct beschreibt, heisst der *Umfang*. Jede gerade Linie vom Mittelpuncte bis zu irgend einem Puncte des Umfangs heisst der *Halbmesser*. Jede gerade Linie von einem Puncte des Umfangs durch den Mittelpunct bis zum gegenüberliegenden Punct des Umfangs heisst der *Durchmesser*. Jede gerade Linie von irgend einem Puncte des Umfangs zu irgend einem andern heisst eine *Sehne*. Eine Sehne, die durch den Mittelpunct geht, ist also ein Durchmesser. Das Stück des Umfangs, wel-

ches von den beyden Endpuncten einer Sehne begränzt wird, heisst ein *Bogen*. Das Stück der Kreisfläche, welches von der Sehne und ihrem Bogen begränzt wird, heisst ein *Abschnitt*. Das Stück der Kreisfläche, welches von zweyen Halbmessern und dem Bogen, welchen sie bespannen, begränzt wird, heisst ein *Ausschnitt*.

§. 17. *Grundsätze*. Alle Halbmesser und Durchmesser eines und ebendesselben Kreises sind einander gleich. Jede unbegränzte gerade Linie durch irgend einen Punct innerhalb des Kreises schneidet den Umfang des Kreises in zweyen Puncten.

§. 18. *Foderung*. Aus jedem gegebenen Puncte in einer Ebene einen Kreis zu beschreiben.

Auf dem Papiere geschieht es vermittelst des *Reisszirkels*.

§. 19. *Erklärung*. Geradlinichte Figuren sind solche, deren Seiten gerade Linien sind. Nach der Anzahl der Seiten sind sie dreyseitige, vierseitige, fünfseitige u. s. w. (Geradlinichte Figuren von zwey Seiten sind unmöglich, wenn man das Wort Figur in der oben bemerkten eingeschränkten Bedeutung nimmt, denn zwey gerade Linien können eine Fläche nicht durchaus begränzen.) So viel Seiten eine geradlinichte Figur hat, so viel Ecken oder Winkel hat sie

auch, daher die Benennungen *Dreyeck*, *Viereck*, *Fünfeck* u. s. w. Figuren von mehr als vier Seiten werden *Vielecke* genannt.

§. 20. *Erklärung.* Ein Dreyeck ist *gleichseitig*, wenn alle drey Seiten einander gleich sind; *gleichschenkelicht*, wenn nur zwey Seiten einander gleich sind; *ungleichseitig*, wenn keine Seite der andern gleich ist. Irgend eine Seite eines Dreyecks kann die *Grundlinie* des Dreyecks heissen. Die *Höhe* des Dreyecks ist sodann die gerade Linie, welche von dem Scheitel des der Grundlinie gegenüberliegenden Winkels auf die Grundlinie senkrecht gezogen werden kann.

§. 21. *Erklärung.* Ein *rechtwinklichtes* Dreyeck ist ein solches, welches einen rechten Winkel hat. Ein *stumpfwinklichtes*, welches einen stumpfen Winkel; ein *spitzwinklichtes*, welches lauter spitze Winkel hat. Im rechtwinklichten Dreyeck heissen die beyden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, *Catheten*; die Seite, welche dem rechten Winkel gegenübersteht, die *Hypothenuse*.

§. 22. *Erklärung.* Ein *Parallelogramm* ist ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten einander parallel sind. Eine beliebige Seite kann als *Grundlinie* angenommen werden; die *Höhe* ist sodann die senkrechte Linie auf die

Grundlinie von irgend einem Punkte der gegen überstehenden Seite.

§. 23. *Erklärung.* Ein Parallelogramm, welches lauter rechte Winkel hat, heisst ein *Rechteck*. Ein Rechteck, welches lauter gleiche Seiten hat, heisst ein *Quadrat*. Ein Parallelogramm mit gleichen Seiten und schiefen Winkeln heisst eine *Raute (Rhombus)*. Ein Parallelogramm, wo nur die gegenüberstehenden Seiten gleich und die Winkel schief sind, heisst ein *Rhomboides*, länglichte Raute. Ungleichseitige Vierecke, wo nur zwey Seiten parallel sind, heissen *Trapezia*.

§. 24. *Erklärung.* Wenn in einem Vieleck alle Seiten und Winkel einander gleich sind, so heisst es ein *reguläres* Vieleck. Im Gegenfalle *irreguläre*.

§. 25. *Erklärung.* *Ähnlich* nennt man überhaupt zwey Dinge, die sich nur durch ihre Grösse unterscheiden. Figuren sind einander ähnlich, wenn die *Winkel* der einen den Winkeln der andern in einerley Ordnung genommen *gleich* und die *Seiten* ebenfalls in einerley Ordnung genommen einander *proportional* sind. Das Zeichen der Ähnlichkeit sey dieses: $\sim$.

§. 26. *Grundsatz.* Ausgedehnte Grössen, die einander *decken*, d. h. wo eine genau in den Ort der andern gesetzt werden kann, so dass alle Gränzen beyder auf einander fallen,

sind einander in allen Stücken gleich, welche die Geometrie an ihnen betrachtet. Das Zeichen der Deckung sey dieses: $\equiv$.

Von ebenen geradlinichten Figuren.

§. 27. *Aufgabe.* Auf einer gegebenen begrenzten geraden Linie AB , Fig. 9. ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben. (Euklid I, 1.)

Auflösung. Man beschreibe aus den beyden Endpunkten der gegebenen Linie Kreise mit den Halbmessern $AB = BA$. Diese durchschneiden sich in C und D . Von einem dieser Durchschnittspunkte wie z. B. von C gerade Linien nach A und B gezogen, geben das verlangte Dreyeck ACB .

Beweis. Es ist $AC = AB$ und $BC = BA$ also auch $AC = BC$, folglich $AC = AB = BC$, d. h. alle drey Seiten sind gleich oder das Dreyeck ACB ist gleichseitig.

§. 28. *Lehrsatz.* Wenn zwey Seiten mit dem Winkel, Fig. 10. welchen sie bilden, in einem Dreyecke so gross sind als in dem andern, so ist Alles in beyden Dreyecken gleich, nämlich sowohl die übrigen Winkel als die übrige Seite und der Flächenraum. (Euklid I. 4.)

Beweis. Es sey $AB = DE$; $AC = DF$ und $A = D$. Man kann sich das Dreyeck DEF ,

so auf das Dreyeck ABC gelegt, vorstellen, dass die Seite DE die Seite AB decke, weil diese beyden Seiten einander gleich sind. Da ferner der Winkel D dem Winkel A gleich ist, so liegt DF auf AC, und weil diese beyden Seiten auch gleich sind, so deckt die Seite DF die Seite AC. Es fallen also die Puncte D, E, F auf A, B, C, mithin muss auch die Seite FE die Seite CB decken. Es fallen also alle Gränzen des Dreyecks DEF genau auf die Gränzen des Dreyecks ABC, d.h. die ganzen Dreyecke decken einander, und es ist also alles in ihnen gleich, der Winkel $F = C$, der Winkel $E = B$, die Seite $FE = CB$ und Flächenraum $DEF =$ dem Flächenraume ABC.

§. 29. *Zusatz.* In einem gleichschenkligten Dreyecke ABC Fig. 11. sind die Winkel an der Grundlinie B und C gleich. Wenn man sich ein anderes Dreyeck denkt, wo $DE = AB$, $DF = AC$ und $D = A$ ist, so deckt sich dieses mit dem Dreyeck ABC, nicht nur, wenn man DE auf AB und DF auf AC legt, sondern auch wenn man DF auf AB und DE auf AC legt. In der ersten Lage deckt der Winkel E den Winkel B, in der zweyten Lage deckt eben der Winkel E den Winkel C, also muss $C = B$ seyn. (Euklid I. 5.) Euklids Beweis ist vom obigen etwas verschieden.

§. 30. *Zusatz.* In einem gleichseitigen Dreyecke Fig. 11. sind alle Winkel einander gleich.

Denn wenn man $\triangle ABC$ als ein gleichschenkeliges Dreyeck ansieht, wo AC die Grundlinie ist, so folgt, dass $\angle A = \angle C$ sey, mithin $\angle A = \angle C = \angle B$. (§. 29.)

§. 31. *Lehrsatz. Wenn eine Seite mit den beyden anliegenden Winkeln* Fig. 10. *in einem Dreyecke so gross sind als in dem andern, so ist Alles in beyden Dreyecken gleich.*

Beweis. Es sey $BC = EF$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$. Man lege $\triangle DEF$, so auf $\triangle ABC$, dass der Punct E auf den Punct B falle und EF auf BC , so muss auch der Punct F auf den Punct C fallen, weil $EF = BC$ ist. Ferner weil $\angle E = \angle B$, so fällt ED auf BA und weil $\angle F = \angle C$, so fällt FD auf CA , also liegt der Punct D zugleich auf BA und auf CA , mithin auf A , folglich decken sich die Dreyecke und Alles in ihnen ist gleich. (Euklid hat diesen Satz erst I, 26.)

§. 32. *Zusatz. Wenn die Winkel an der Grundlinie* Fig. 11. *in einem Dreyecke einander gleich sind, so ist das Dreyeck gleichschenkelig.* Es sey $B = C$, man denke sich ein Dreyeck DEF , welches sich mit dem ABC deckt, wo $EF = BC$, $E = B$, $F = C$ ist, da nun $B = C$ ist, so ist auch $E = C$ und $F = B$, mithin decken sich die Dreyecke auch wenn man E auf C und F auf B legt. In der ersten Lage deckte ED die Seite BA ; in der zweyten Lage deckt eben die ED die Seite CA , also ist $BA =$

CA. (Euklid beweist diesen Satz I, 6, die Con-
versa von §. 29 auf eine andere Art durch eine
ἀπαγωγή εἰς ἀδύνατον *), weil er den Satz §. 31.
nicht vorausgeschickt hatte und die Sache bloss
aus §. 28. herleiten musste.)

Ein Dreyeck, dessen drey Winkel einander
gleich sind, ist gleichseitig. Denn weil $B = C$
so ist $AC = AB$, und weil $B = A$, so ist AC
 $= CB$ (§. 32.) also $AC = AB = CB$.

§. 33. *Lehrsatz. Wenn alle drey Seiten in*
dem einen Dreyeck so gross sind als in dem an-
dern, so ist Alles in beyden Dreyecken gleich.
(Euklid I. 8.)

Beweis. Es sey $AB = DE$, $BC = EF$, CA
 $= FD$. Man lege $\triangle DEF$ so an $\triangle ABC$, dass
D an A, DF an AC, folglich F an C falle (weil
 $DF = AC$ ist) und zwar lege man beyde Drey-
ecke in eine Ebene, so dass E und B auf ent-
gegengesetzte Seiten von AC oder DF fallen.
Nun verbinde man E und B durch eine gerade
Linie BE, so sind drey Fälle möglich.

Entweder liegen beyde Seiten BC und EF
in der geraden Linie BE Fig. 12.

oder sie liegen so, dass BE innerhalb der
Dreyecke fällt. Fig. 13.

*) *Deductio ad impossibile*, wenn man die Unmöglich-
keit des Gegentheils zeigt.

oder so, dass BE ausserhalb der Dreyecke fällt. Fig. 14.

Erster Fall. Da $AB = DE$, so ist $\triangle ABE$ gleichschenkelicht, Fig. 12. folglich $\angle B = \angle E$ (§. 29.) und es ist auch $BC = EF$, folglich $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. (§. 28.)

Zweyter Fall. $\triangle ABE$ ist gleichschenkelicht, Fig. 13. weil $AB = DE$ folglich $\angle x = \angle y$; ferner ist $\triangle BCE$ gleichschenkelicht, weil $BC = EF$, folglich $\angle m = \angle n$, mithin $x + m = y + n$, folglich $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. (§. 28.)

Dritter Fall. $\triangle ABE$ ist gleichschenkelicht, Fig. 14. also $x + m = y + n$; ferner $\triangle BCE$ gleichschenkelicht, also $m = n$, folglich Gleiches von Gleichem abgezogen, $x = y$, also $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. (§. 28.)

§. 34. *Zusatz.* In deckenden Dreyecken stehen gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber und umgekehrt.

§. 35. *Anmerkung.* Euklid beweist den Lehrsatz (33) auf eine andere Art. Er schickt einen andern Satz I. 7. vorher, den er durch eine deductio ad impossibile darthut. Der hier gebrauchte Beweis (§. 33.), dessen sich Kästner und Segner bedienen, wird durch eine vollständige Induction geführt, indem die drey Fälle alle mögliche Lagen erschöpfen. Noch anders beweist ihn Karsten Lehrbegr. I. S. 243.

Auszug I. S. 76. Noch anders *Busse* erste Geometrie 2te Aufl. S. 70.

§. 36. *Aufgabe.* Ein Dreyeck DEF zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreyecke ABC deckend sey. Fig. 15.

Auflösung. Man mache $EF = BC$, mit dem Halbmesser BA beschreibe man aus E einen Kreis, mit dem Halbmesser CA beschreibe man aus F ebenfalls einen Kreis (zur Ausübung sind Bogen in der Gegend, wo der Durchschnittspunct hinfällt, hinreichend). Aus dem Durchschnittspuncte D ziehe man DE und DF .

Beweis. Es ist $EF = BC$, $ED = BA$, $FD = CA$. Mithin $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

§. 37. *Zusatz.* Um einen Winkel E Fig. 16. einem gegebenen Winkel B gleich zu machen, nehme man auf den Schenkeln des gegebenen Winkels nach Gefallen BA und BC und ziehe AC , hiernächst mache man ein Dreyeck DEF , welches dem $\triangle ABC$ deckend sey, so ist $\angle E = \angle B$. (Enklid I. 23.)

§. 38. *Aufgabe.* Einen gegebenen Winkel zu halbiren. Fig. 17. (Euklid I. 9.)

Auflösung. Es sey der gegebene Winkel BAC , auf einem seiner Schenkel nehme man willkührlich einen Punct D und mache $AE = AD$. Ziehe DE und beschreibe auf dieser Linie

ein gleichseitiges Dreyeck DEF, ziehe AF, so halbirt diese den Winkel BAC.

Beweis. Es ist $AD = AE$, $DF = EF$, $AF = AF$, folglich $\triangle ADF \cong \triangle AEF$ und $x = y$ jeder $= \frac{1}{2}$ BAC.

§. 39. *Aufgabe.* Eine gegebene begränzte gerade Linie AB zu halbiren. Fig. 18. (Euklid I. 10.)

Auflösung. Man beschreibe über AB das gleichseitige Dreyeck ACB und halbire den Winkel C, (§. 38.) die Linie CD, welche dieses thut, halbiret auch die Linie AB.

Beweis. Es ist $AC = BC$, $CD = CD$ und $x = y$, also $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ und folglich $AD = BD$ — jedes $= \frac{1}{2}AB$.

§. 40. *Aufgabe.* Auf einer gegebenen unbegränzten geraden Linie AB in einem auf ihr gegebenen Punkte C eine senkrechte Linie aufzurichten. Fig. 19. (Euklid I. 11.)

Auflösung. Man mache nach Gefallen $CD = CE$, beschreibe über DE das gleichseitige Dreyeck DEF und ziehe CF, so ist dieses die gesuchte senkrechte Linie. Auch wenn C der Endpunct einer Linie wäre, findet die Auflösung Statt, da man die Linie nach Gefallen verlängern kann.

Beweis. Es ist $CD = CE$, $DF = EF$, $FC = FC$, folglich $\triangle FDC \cong \triangle FEC$, folglich $\angle x = \angle y$ und also FC senkrecht auf AB . (§. 13.)

§. 41. *Aufgabe.* Auf eine gegebene unbeschränkte gerade Linie AB von einem ausserhalb derselben gegebenen Punkte C eine senkrechte Linie zu fallen. Fig. 20. (Euklid I. 12.)

Auflösung. Man nehme einen Punkt F an der andern Seite von AB als wo C liegt und beschreibe mit dem Halbmesser CF einen Kreis, dessen Umfang die gerade Linie AB in den Punkten D und E schneidet, sodann halbire man DE in H und ziehe CH , so ist diese senkrecht auf AB .

Beweis. Man ziehe des Beweises wegen CD und CE , so ist $CD = CE$, $DH = EH$, $CH = CH$, also $\triangle CDH \cong \triangle CEH$, also $\angle x = \angle y$ und CH senkrecht auf AB .

§. 42. *Anmerkung.* Dass bey der Aufgabe (§. 38. und den darauf gegründeten §. 39, 40, 41) das $\triangle DEF$ (Fig. 17.) gleichseitig sey, ist nicht nothwendig, sondern es ist nur nothwendig, dass $DF = FE$ sey. Allein andere als gleichseitige Dreyecke zu beschreiben, ohne dass schon ein gegebenes Dreyeck da sey, ist noch nicht gezeigt worden. Wir wissen noch nicht, ob aus willkührlich angenommenen Seiten oder Winkeln immer ein Dreyeck verzeich-

net werden könne. Es könnten Bedingungen dabey Statt finden, von denen noch nichts vorgekommen ist.

§. 43. *Lehrsatz.* *Zwey Nebenwinkel sind zusammen genommen immer zwey rechten Winkeln gleich.* Fig. 21. (Euklid I. 13.)

Beweis. Entweder sind sie gleich wie EBD und EBC, da denn jeder selbst ein rechter Winkel ist, oder sie sind ungleich wie ABD und ABC. Im letztern Falle ist $ABD = EBD + EBA$, hingegen ist $ABC = EBC - EBA$. Folglich $ABD + ABC = EBD + EBC$, das ist = zweyen rechten Winkeln, welches man auch durch $= 2 R$ bezeichnet.

§. 44. *Zusatz.* Wenn zwey Winkel, Fig. 22. welchen einen Schenkel gemeinschaftlich haben zusammen genommen, zweyen rechten Winkeln gleich sind, so sind es Nebenwinkel und die beyden andern CB und BD müssen in einer geraden Linie an einander liegen, denn sollte nicht BD, sondern irgend eine andere Linie BE mit BC in einer geraden Linie liegen, so müsste $ABC + ABE = 2 R$ seyn nach §. 43., welches aber nicht möglich ist, da der Voraussetzung gemäss $ABC + ABD = 2 R$ seyn sollen. (Euklid I. 14.)

§. 45. *Zusatz.* Alle Winkel, die an einer Seite einer geraden Linie an einem Punkte liegen, sind zusammen genommen $= 2 R$. Alle

Winkel zu beyden Seiten einer geraden Linie oder überhaupt alle Winkel, die um einen Punct herumliegen, sind zusammen genommen $= 4$ R. Ein gestreckter Winkel (§. 14.) ist $= 2$ R. Ein convexer Winkel ist > 2 R.

§. 46. *Lehrsatz.* Zwey gerade Linien, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel. Fig. 23. (Euklid I. 15.)

Beweis. Es ist $x + m = 2$ R (§. 43.) und $m + y = 2$ R, mithin $x + m = m + y$, folglich $x = y$. Eben so ist $m + x = 2$ R und $x + n = 2$ R, also $m + x = x + n$, folglich $m = n$.

§. 47. *Lehrsatz.* Bey jedem Dreyeck ABC ist, wenn man eine seiner Seiten BC verlängert, der Aussenwinkel ACD grösser als jeder seiner innern Gegenwinkel CBA , BAC . F. 24. (Euklid I. 16.)

Beweis. Man halbire AC in E , ziehe BE , verlängere sie bis $EF = BE$. Nun ist $AE = EC$, $BE = EF$, $\angle AEB = \angle FEC$, also auch $BAE = ECF$. Aber $ACD > ECF$, folglich $ACD > BAE$.

Eben so wird BC halhirt und bewiesen, dass BCG oder $ACD > ABC$ sey.

§. 48. *Zusatz.* In jedem Dreyecke sind jede zwey Winkel zusammen genommen kleiner als zwey rechte. (Euklid I. 17.)

§. 49. *Zusatz.* In jedem Dreyecke, welches einen rechten oder einen stumpfen Winkel hat, sind die beyden andern Winkel spitzig. Dies ist eine von den Bedingungen, wovon §. 42. etwas erwähnt wurde.

§. 50. *Zusatz.* Auf eine gegebene gerade Linie giebt es auf einen Punct in ihr und von jenem Puncte ausser ihr nur eine einzige senkrechte Linie.

§. 51. *Zusatz.* Eine gerade Linie aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreyecks auf die Grundlinie senkrecht gezogen, halbiret die Grundlinie sowohl als den Winkel an der Spitze.

§. 52. *Zusatz.* In jedem Dreyecke liegt der grössern Seite auch der grössere Winkel gegenüber. Fig. 25. Wenn $AC > AB$, so mache man $AD = AB$ und ziehe BD , so ist $ADB = ABD > ACB$. — Um so mehr $ABC > ACB$. (Euklid I. 18.) So auch wenn in zwey Dreyecken, zwey Seiten, zweyen Seiten gleich die dritte aber in einem Dreyeck grösser als in dem andern, so ist auch der Winkel, der ihr gegenübersteht, grösser. (Euklid I. 25.)

§. 53. *Zusatz.* In jedem Dreyecke liegt dem grössern Winkel auch die grössere Seite gegenüber. (Euklid I. 19.) So auch wenn in zwey Dreyecken, zwey Seiten, zweyen Seiten gleich, der eingeschlossene Winkel aber in einem Drey-

eck grösser als in dem andern, so ist auch die gegenüberstehende Seite grösser. (Euklid I. 24.)

§. 54. *Zusatz.* In jedem Dreyeck Fig. 26. sind jede zwey Seiten zusammen genommen grösser als die dritte. Man verlängere BA, so dass $AD = AC$, also $BD = BA + AC$, nun ist $ACD = ADC$, aber $BCD > ACD$, also auch $BCD > ADC$, also $BD > BC$, oder $BA + AC > BC$. (Euklid I. 20.) Dies ist die zweyte Bedingung, deren §. 42. erwähnt wurde.

§. 55. *Zusatz.* Die senkrechte Linie von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Linie die *Entfernung* ist zugleich die *kürzeste*, welche von dem gegebenen Punkte nach der gegebenen Linie Statt findet. (§. 53 und 49.)

§. 56. *Aufgabe.* Ein Dreyeck zu zeichnen wenn drey Stücke, worunter wenigstens eine Seite seyn muss, gegeben sind, und zwar den Bedingungen §. 49 und 54 gemäss.

Auflösung. Es können gegeben seyn: 1) Zwey Seiten mit dem zwischenliegenden Winkel, 2) eine Seite mit den beyden anliegenden Winkeln, 3) alle drey Seiten. In den beyden ersten Fällen wendet man §. 37 an. Im letztern Falle ist die Auflösung der §. 27 ähnlich.

§. 57. *Lehrsatz.* Wenn zwey gerade in einer Ebene liegende Linien AB, CD von einer dritten Linie EF so durchschnitten werden, dass

die einseitigen innern Winkel BEF , EFD zusammengenommen $= 2 R$ sind, so sind die Linien AB , CD , parallel. Fig. 27. (Eukl. I. 28.)

Beweis. Sollten sie in irgend einem Punkte G zusammenstossen, so müssten im Dreyeck EFG die beyden Winkel $BEF + EFD = 2 R$ seyn, welches unmöglich ist. Es kann also kein Dreyeck entstehen, das heisst, die Linien können nicht an der Seite von G zusammenstossen. Eben so erhellet es, dass sie auch auf der andern Seite von EF nicht zusammenstossen können, denn wenn $BEF + EFD = 2 R$ so sind auch $AEF + EFC = 2 R$, weil alle vier als zwey Paar Nebenwinkel $= 4 R$ sind.

§. 58. *Zusatz.* Wenn die *Wechselwinkel* gleich sind, z. B. wenn $BEF = EFC$, so sind AB , CD ebenfalls parallel. Denn $EFC + EFD = 2 R$, also auch $BEF + EFD = 2 R$ wie §. 57. (Euklid I. 27.)

§. 59. *Zusatz.* Wenn die *gleichliegenden Winkel* gleich sind, z. B. wenn $HEB = EFD$, so sind AB , CD ebenfalls parallel, denn $HEB + BEF = 2 R$, also auch $EFD + BEF = 2 R$ wie §. 57. (Euklid I. 28.)

§. 60. *Grundsatz.* Wenn zwey in einer Ebene liegende unbegranzte gerade Linien AB und AC Fig. 28. in A zusammenstossen, so werden die *Entfernungen* DE , FG (§. 55.) zwischen den Schenkeln des Winkels immer grösser

je weiter sie von dem Scheitel A wegrücken und können grösser werden als jede gegebene gerade Linie, denn es sey eine gegebene Linie $= HK$, die Entfernung des Punctes K von AB, so lässt sich immer noch ein Punct M in dem Schenkel AC nehmen, der weiter als K vom Scheitel liegt und seine Entfernung ML von AB ist $> HK$.

§. 61. *Zusatz.* Wenn zwey in einer Ebene liegende gerade Linien FB, GC Fig. 28. eine solche Lage haben, dass sie rückwärts verlängert in A zusammenstossen, so werden die Entfernungen zwischen ihnen nach A hin kleiner, nach B hin grösser.

§. 62. *Zusatz.* Wenn zwey in einer Ebene liegende gerade Linien FB, GC eine solche Lage haben, dass die Entfernungen zwischen ihnen nach der einen Seite grösser, nach der entgegengesetzten Seite aber kleiner werden, so *divergiren* sie nach jener Seite und *convergiren* nach dieser Seite und stossen verlängert nach dieser Seite zusammen.

§. 63. *Zusatz.* Wenn zwey Linien parallel sind, so sind die Entfernungen zwischen ihnen immer gleich, man mag die Linien verlängern so weit man will, denn sollten die Entfernungen *nicht* allenthalben gleich seyn, so müssten sie nach einer Seite hin grösser, nach der entgegengesetzten Seite aber kleiner werden, das heisst, die Linien müssten nach jener Seite *divergiren*.

nach dieser Seite *convergiren* (§. 62.), welches der Voraussetzung, dass sie parallel seyn sollen, widerspricht.

So auch umgekehrt: wenn die Entfernungen gleich sind, so sind die Linien parallel.

§. 64. *Zusatz.* Wenn zwey in einer Ebene liegende gerade Linien GH und CD Fig. 29. eine solche Lage haben, dass sie mit einer dritten EF zwey einseitige innere Winkel HEF und EFD machen, welche zusammen genommen kleiner als 2 R sind, so stossen sie verlängert nach der Seite von D hin zusammen. Denn eine andere Linie AB mache $\text{BEF} + \text{EFD} = 2 \text{ R}$, so ist diese AB mit CD parallel §. 58. mithin die Entfernungen KO, LP allenthalben gleich (§. 63.) Aber KM, LN werden ohne Ende grösser §. 60. Mithin MO, NP immer kleiner und sie müssen nothwendig irgendwo ganz verschwinden, da denn daselbst die Linien GH, CD zusammenstossen. (§. 62.)

§. 65. *Zusatz.* Die Entfernung der Linien AB, CD von einander als eine sich immer gleichbleibende oder *beständige* Grösse sey $= a$. Die Entfernung der Linien EB, EH, als eine *veränderliche* Grösse, sey $= x$. Die Entfernung der Linien EH und FD, als eine ebenfalls *veränderliche* Grösse sey $= y$, so ist $y = a - x$ und folglich y entweder *bejaht* oder *nichts* oder *verneint*, nachdem x kleiner oder eben so gross oder grösser als a ist.

§. 66. *Zusatz.* Wenn zwey Linien GH, CD mit einer dritten EF an der einen Seite zwey einseitige innere Winkel GEF, EFC machen, die grösser als 2 R sind, so stossen sie nach der *andern* Seite zusammen. Denn $GEF + HEF + EFC + EFD = 4 R$, weil es zwey Paar Nebenwinkel sind, folglich, wenn $GEF + EFC > 2 R$, so ist $HEF + EFD < 2 R$, mithin stossen hier die Linien zusammen. (§. 64.)

§. 67. *Anmerkung.* Der Satz §. 64. ist das angefochtene eilfte Axiom des Euklids, welches für einen Grundsatz an *der* Stelle, wo er steht, nemlich ganz anfangs vor allen übrigen Sätzen allerdings nicht Evidenz genug hat, dessen Richtigkeit aber nach gehörigen vorhergegangenen Betrachtungen einleuchtend genug ist. In einigen Ausgaben der Euklidischen Elemente ist er daher als Lemma erst nach dem ersten Lehrsatz von Parallellinien gesetzt.

§. 68. *Lehrsatz.* Wenn eine gerade Linie AB mit einer andern CD parallel ist, so sind die einseitigen innern Winkel, welche sie mit einer dritten Linie EF machen, zusammen = 2 R. Fig. 27. (Euklid I. 29.)

Beweis. Wären die Winkel zusammenge-
nommen an der einen Seite von FE kleiner als 2 R, so müssten die Linien nach *dieser* Seite hin zusammenstossen. (§. 64.) Wären sie grösser als 2 R, so müssten die Linien nach der *an-*

dern Seite zusammenstossen. Da sie nun aber der Voraussetzung gemäss parallel sind, das heisst, an keiner Seite zusammenstossen, so können die einseitigen innern Winkel an keiner Seite grösser oder kleiner als $2 R$, d. h. sie müssen an jeder Seite $= 2 R$ seyn.

§. 69. *Zusatz.* Wenn zwey Linien parallel sind, so sind auch die *Wechselwinkel* wie BEF und EFC einander gleich. Denn $BEF + EFD = 2 R$, aber auch $EFC + EFD = 2 R$, folglich $BEF = EFC$.

§. 70. *Zusatz.* Wenn zwey Linien parallel sind, so sind auch die *gleichliegenden Winkel* wie HEB und EFD (Fig. 27.) einander gleich. Denn $BEF + EFD = 2 R$, aber auch $BEF + HEB = 2 R$, folglich $EFD = HEB$.

§. 71. *Zusatz.* Durch einen Punct E geht mit CD nur eine Parallellinie AB . Fig. 29. Denn wenn AB parallel CD ist, so ist $BEF + EFD = 2 R$. Aber jede andere Linie GH , welche durch E in einer andern Lage als AB gelegt wird und folglich mit dieser einen Winkel BEH macht, kann nicht die einseitigen innern Winkel auch $= 2 R$ machen, sondern entweder grösser oder kleiner und in beyden Fällen stösst sie mit CD zusammen.

§. 72. *Zusatz.* Wenn zwey Linien AB, CD Fig. 30. mit einer dritten EF parallel sind, so

sind auch AB , CD selbst parallel. Denn weil $AGH = GHF$ und $GHF = HKD$ ist, so ist auch $AHG = HKD$. (Euklid I. 30.)

§. 73. *Aufgabe.* Durch einen gegebenen Punct E , ausser einer gegebenen geraden Linie CD , eine gerade Linie AB zu ziehen, die mit CD parallel sey. Fig. 27. (Euklid I. 31.)

Auflösung. Man zieht durch E eine beliebige gerade Linie EF , welche die gegebene in F schneidet und macht $AEF = EFD$ oder auch $HEB = EFD$.

§. 74. *Lehrsatz.* In jedem Dreyecke ABC sind alle drey Winkel zusammengekommen $= 2$ R. Fig. 31. (Euklid I. 32.)

Beweis. Man ziehe durch C eine Linie CE mit BA parallel, (§. 73.) so ist $ACB = ACE$, $ACE = CAB$, $ECD = ABC$, folglich $ACB + ACE + ECD = CAB + ABC$. Jene aber sind $= 2$ R (§. 45.) also auch diese.

§. 75. *Zusatz.* Wenn eine Seite eines Dreyecks verlängert wird, so ist der dadurch gebildete äussere Winkel ACD so gross als die beyden gegenüberliegenden innern Winkel BAC und ABC zusammengekommen.

§. 76. *Zusatz.* Wenn in einem Dreyeck ein Winkel ein rechter ist, so sind die beyden übr-

gen spitzen Winkel *zusammen* auch einem rechten gleich.

§. 77. *Zusatz.* Wenn in einem gleichschenkelichten Dreyecke der Winkel, der zwischen den gleichen Schenkeln liegt, ein rechter Winkel ist, so ist jeder der beyden übrigen Winkel $= \frac{1}{2} R$.

§. 78. *Zusatz.* In einem gleichseitigen Dreyecke ist jeder Winkel $= \frac{2 R}{3} = \frac{2}{3} R$.

§. 79. *Zusatz.* Wenn in einem Dreyecke eine Seite ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel Fig. 10. so gross sind wie in einem andern Dreyecke, so ist alles in beyden Dreyecken gleich. Es sey $AB = DE$, $B = E$, $C = F$, so ist $B + C = E + F$, also von $2 R$ abgezogen, bleibt $A = D$, mithin wie §. 31. (Euklid I. 26. nimmt diesen Satz und den §. 31 zusammen.)

§. 80. *Anmerkung.* Anfänger können bey Vergleichung von §. 79 und §. 31 darauf verfallen, ob sich nicht auch bey §. 28. (dem ersten Lehrsatz von der Deckung der Dreyecke) eine ähnliche Erweiterung anbringen lisse, Fig. 32. ob man nicht sagen könne: Wenn zwey Seiten und ein (nicht zwischenliegender, sondern) anliegender Winkel in einem Dreyecke so gross sind als in dem andern, so decken sich die Dreyecke? — Diese Behauptung aber findet

nicht schlechthin Statt, denn es könnten zwey Dreyecke EFD und EFG seyn, worin die genannten Stücke gleich wären und wovon doch nur eins mit dem $\triangle ABC$ deckend seyn kann. Die genannten drey Stücke bestimmen nicht ein einziges Dreyeck. Wenn $\triangle ABC$ gegeben und ein anderes demselben deckendes gezeichnet werden sollte, so mache man zuerst $EF = AC$, $E = B$ und ziehe die unbegranzte Linie ED. Mit dem Halbmesser $= CA$ beschreibe man einen Kreis, dessen Umfang die Linie ED in zwey Puncten S und D schneidet. Mithin ist es unentschieden, ob der Durchschnittspunct G oder D genommen werden müsse. Nur in dem einzigen Falle wäre das Dreyeck bestimmt, wenn CA die kürzeste Linie von C auf AB wäre, das heisst also, wenn CA senkrecht auf AB stände, da denn die Durchschnittspuncte D und G im zweyten Dreyeck zusammenfallen.

§. 81. *Zusatz.* In jeder geradlinichten Figur Fig. 33. ist die Summe aller Winkel so viel mal $2 R$ als die Figur Seiten hat weniger zwey oder wenn die Summe der Winkel $= s$ die Anzahl der Seiten $= n$, so ist $s = (n - 2) 2 R$. Denn jede geradlinichte Figur ABCDE kann in so viel Dreyecke getheilt werden, als sie Seiten hat, wenn man aus einem beliebigen Puncte M innerhalb der Figur nach allen Ecken gerade Linien zieht. Die Summe aller Winkel in diesen Dreyecken ist also $= n 2 R$, wovon aber die

um den Punct M herumliegenden, welche nicht von den Seiten der Figur gebildet werden, abzuziehen sind. Letztere aber betragen $4 R$. Mithin die Summe der Winkel in der Figur $= n R - 4 R = (n - 2) 2 R$.

§. 82. *Anmerkung.* Eben das erhellet, wenn man die Figur durch Diagonallinien aus einem ihrer Eckpuncte in Dreyecke theilt, da nemlich $n - 2$ Dreyecke entstehen, wenn die Figur n Seiten hat.

§. 83. *Zusatz.* Die *Aussenwinkel*, Fig. 33. welche durch Verlängerung der Seiten einer Figur entstehen als LAB, FBC, GCD, HDE, KEA betragen zusammen $4 R$. Denn jeder macht mit einem innern Winkel der Figur ein Paar Nebenwinkel. Die Summe dieser Paare von Nebenwinkeln ist $= n \cdot 2 R$, hiervon die Summen der innern Winkel der Figur $= (n - 2) 2 R$ abgezogen, bleibt die Summe der Aussenwinkel $= 4 R$.

§. 84. *Zusatz.* In jeder geradlinichten Figur sind wenigstens drey *concave* Winkel (d. h. die $< 2 R$ sind). Denn wenn in einer Figur von n Seiten nur zwey *concave* Winkel wären, die übrigen $n - 2$ Winkel aber *gestreckte* oder *convexe*, so wäre dieser letztern Summe schon $= (n - 2) 2 R$ oder gar $> (n - 2) 2 R$, da doch alle Winkel der Figur zusammen genommen nur $= (n - 2) 2 R$ seyn können.

§. 85. *Lehrsatz.* Ein jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey sich deckende Dreyecke getheilt. Fig 34. (Euklid I. 34.)

Beweis. Es ist $AC = AC$, $BAC = ACD$, weil $AB \parallel CD$ und $BCA = CAD$, weil $BC \parallel AD$, folglich $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.

§. 86. *Zusätze.* Die gegenüberstehenden Seiten und Winkel in jedem Parallelogramm sind sich gleich, und umgekehrt: eine vierseitige Figur, deren gegenüberstehende Seiten und Winkel gleich sind, ist ein Parallelogramm. Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich. Die an einer Seite liegenden Winkel in jedem Parallelogramm betragen zusammen 2 R. Ein Parallelogramm, worin ein Winkel $= R$ ist, hat vier rechte Winkel.

§. 87. *Aufgabe.* Wenn zwey an einander gränzende Seiten AB , BC eines Parallelogramms und der Winkel B , den sie bilden, gegeben sind, das Parallelogramm zu zeichnen.

Auflösung. Aus den gegebenen Stücken beschreibe man zuerst ein Dreyeck ABC und über der Linie BC ein dem vorigen deckendes Dreyeck ADC , so dass $DC = AB$, $AD = BC$ sey. (Zur Ausübung ist die Linie AC nicht nöthig.)

Wie ein Quadrat zu zeichnen sey, ist hieraus von selbst klar.

§. 88. *Lehrsatz.* Parallelogramme auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen haben gleichen Flächeninhalt. (Eukl. I. 35.)

Beweis. Es sind drey Fälle möglich, entweder fällt E in AD oder in D oder ausser AD. *Erstlich:* In Fig. 35. ist $\triangle AEB = \triangle DCF$, weil alle drey Seiten gleich sind, folglich zu jedem das Trapezium EDBC addirt, ist $ABCD = EBCF$. *Zweytens:* In Fig. 36. ist $\triangle AEB = \triangle DCF$ und zu jedem das Dreyeck DBC addirt, ist $ABCD = EBCF$. *Drittens:* In Fig. 37. ist $\triangle AEB = \triangle DCF$ und von jedem das $\triangle DEG$ abgezogen, hingegen das $\triangle BGC$ addirt, ist $ABCD = EBCF$.

§. 89. *Zusatz.* Parallelogramme von gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen sind sich auch gleich Fig. 38. (Euklid I. 36.) beyde $= BCEF$.

§. 90. *Zusatz.* Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind sich gleich, denn wenn ihre Grundlinien in eine gerade Linie BH gestellt werden, so liegen die gegenüberstehenden Seiten in einer Parallele mit den Grundlinien, weil $DK = EL$ und beyde senkrecht auf BH sind.

§. 91. *Zusatz.* Dreyecke auf einerley Grundlinie und in einerley Parallelen sind einander gleich, denn man kann sie als die Hälften von

Parallelogrammen ansehen, die durch ihre Diagonalen getheilt wären. (Euklid I. 37.)

§. 92. *Zusatz.* Folglich sind auch Dreyecke auf gleichen Grundlinien und zwischen einerley Parallelen einander gleich (Euklid I. 38.) und überhaupt auch Dreyecke von gleichen Grundlinien und Höhen. (§. 90.)

§. 93. *Zusatz.* Gleiche Dreyecke auf einerley Grundlinie und an einerley Seite sind zwischen einerley Parallelen, (Euklid I. 39.) welches sogleich durch eine leichte deductio ad impossibile erhellet.

§. 94. *Zusatz.* Gleiche Dreyecke auf gleichen Grundlinien und an einerley Seite sind zwischen einerley Parallelen, (Euklid I. 40) welches ebenfalls wie §. 93. leicht erhellet.

§. 95. *Zusatz.* Ein Parallelogramm ist zweymal so gross als ein Dreyeck, welches auf einerley Grundlinie und zwischen einerley Parallelen liegt oder welches gleiche Grundlinie und Höhe hat.

§. 96. *Aufgabe.* Ein Parallelogramm zu machen, welches einem gegebenen Dreyecke gleich sey. (Euklid I. 42.)

Auflösung. Man halbire die Grundlinie des Dreyecks und setze auf diese Hälfte ein Parallelogramm, welches mit dem Dreyecke zwischen einerley Parallelen liegt.

§. 97. *Lehrsatz.* Wenn durch einen Punct *K* der Diagonale eines Parallelogramms eine Linie *EF* mit *AD* und eine *HG* mit *AB* parallel gezogen wird, so sind die kleinern Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, einander gleich. Fig. 34. (Euklid I. 43.)

Beweis. Die Dreyecke *ABC* und *ADC* sind gleich, auch sind die Dreyecke *AEK*, *KGC* gleich den Dreyecken *AHK*, *KFC*; daher diese von *ABC* und *ADC* abgezogen, Gleiches übrig bleibt, nemlich $EBGK = HDFK$.

§. 98. *Anmerkung.* Auf diesen Satz (§. 97.) gründet sich die Auflösung der Aufgabe ein Parallelogramm auf einer gegebenen Seite und unter einem gegebenen Winkel einem gegebenen Dreyecke gleich zu machen, (Euklid I. 44.) wie auch: Eine gegebene geradlinichte Figur in ein Parallelogramm von gegebenem Winkel zu verwandeln. (Euklid I. 45.)

§. 99. *Aufgabe.* Eine jede geradlinichte Figur in eine andere von gleichem Flächenraume aber von weniger Seiten zu verwandeln. Fig. 39.

Auflösung. Man ziehe *BE* und mit ihr parallel *AF*, welche sich mit der verlängerten *DE* in *F* schneidet, ziehe ferner *BF*, so ist $\triangle BEF = \triangle BEA$ und die Figur $BFDC = BAEDC$, jene aber hat eine Seite weniger als diese.

§. 100. *Anmerkung.* So kann man jede geradlinichte Figur auf ein Dreyeck von gleichem Flächeninhalt bringen, wenn man das Verfahren §. 99. immer wiederholt.

§. 101. *Aufgabe.* Mehrere Dreyecke von gleicher Höhe in ein einziges von ebender Höhe zu verwandeln, welches jenen zusammen genommen gleich ist.

Auflösung. Man mache ein Dreyeck von der gegebenen Höhe, dessen Grundlinie den Grundlinien der gegebenen Dreyecke zusammen genommen gleich ist. Der Beweis folgt aus §. 92.

§. 102. *Anmerkung.* Vielseitige Figuren zu beschreiben würde hier ausführlich zu zeigen zu weitläufig fallen. Es müssen Seiten und Winkel oder Seiten und Diagonale dazu gegeben seyn.

§. 103. *Lehrsatz.* In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich den Quadraten der beyden Catheten zusammen genommen. Fig. 40. (Euklid I. 47.)

Beweis. Man beschreibe die Quadrate und ziehe AL parallel mit BD und die Linien AD, AE, FC, BK, so ist $\triangle ABD = \triangle FBC$, das ist $\frac{1}{2}BDLM = \frac{1}{2}BFGA$, also auch $BDLM = BFGA$; ferner $\triangle ACE = \triangle BCK$, das ist $\frac{1}{2}CMLE = \frac{1}{2}CAHK$, also auch $CMLE =$

CAHK, folglich BDLM + CMLE oder BCED = BFGA + CAHK.

Anmerkung. Dieser wichtige Satz heisst der *Magister Matheseos* oder auch der pythagorische Lehrsatz, von seinem Erfinder Pythagoras, der deshalb ein Opfer gebracht haben soll. Man kann ihn auf mehrere Arten beweisen. Obiger Beweis ist der Euklidische. Einen andern sehe man in *Klügels Encyklopädie I. Geom. 115.*

§. 104. *Zusatz.* Wenn in einem Dreyecke das Quadrat der einen Seite den Quadraten der beyden übrigen Seiten zusammengenommen gleich ist, so ist das Dreyeck ein rechtwinklichtes. (Euklid I. 48.)

§. 105. *Zusatz.* Wenn in einem Dreyeck ABC Fig. 40. (wo A nun nicht ein rechter Winkel zu seyn braucht) eine senkrechte Linie AM von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, so entstehen dadurch die Abschnitte der Grundlinie BM, MC und es ist $AM^2 = AB^2 - BM^2$ aber auch ist $AM^2 = AC^2 - MC^2$ folglich ist $AB^2 - BM^2 = AC^2 - MC^2$.

§. 106. *Aufgabe.* Ein Quadrat zu machen, welches zweyen andern zusammengenommen gleich sey.

Auflösung. Man setze die Seiten des letztern rechtwinklicht an einander, ziehe die Hypothenuse und beschreibe ihr Quadrat.

§. 107. *Zusatz.* So lassen sich drey und mehrere Quadrate in eins bringen.

§. 108. *Zusatz.* Vom Quadrat der Hypothenuse das Quadrat der einen Cathete abgezogen, bleibt das Quadrat der andern übrig.

§. 109. *Aufgabe.* Ein Quadrat zu machen, welches dem Unterschiede zweyer gegebenen Quadrate gleich sey. Fig. 41. (Euklid XI. 23. der eingeschaltete Lehrsatz.)

Auflösung. Auf die Seite AB des kleinern gegebenen Quadrats richte man in A eine senkrechte Linie auf und beschreibe aus B mit der Seite des grössern Quadrats BC einen Bogen, der jene Linie in C schneidet, so ist AC die Seite des gesuchten Quadrats.

§. 110. *Anmerkung.* Euklids zweytes Buch enthält vierzehn Sätze von Rechtecken aus den Abschnitten einer geraden Linie, die wir übergehen. Beym Unterricht, falls er in der Ausführlichkeit Statt findet, können sie beygefügt werden. Der letzte ist, eine gegebene geradlinichte Figur in ein ihr gleiches Quadrat zu verwandeln.

§. 111. *Lehrsatz.* Dreyecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien. Fig. 42. (Euklid VI. 1.)

Beweis. Die Grundlinien AC, EG seyen *commensurabel*; es sey $AD = EH$ eine Länge,

mit der sowohl AC als EG sich genau messen lassen. Wenn nun AD in AC genau m mal und EH in EG genau n mal enthalten ist, so enthält $\triangle ABC$ genau m solche Dreyecke wie ABD und $\triangle EFG$ genau n solche Dreyecke wie EFH, aber $\triangle ABD = \triangle EFH$, folglich:

$$\triangle ABC : \triangle EFG = m : n = AC : EG.$$

Die Grundlinien AC, EG seyen ferner *incommensurabel*. AC werde genau von AD gemessen und sey $= m \cdot AD$. Aber EG sey $> n \cdot EH$ und $< (n + 1) \cdot EH$. Nun kann man AD $= EH$ so klein annehmen, dass der Fehler, den man begeht, wenn man $\triangle ABC : \triangle EFG = m : n$ annimmt, verschwindet. Mithin kann die Irrationalverhältniss der Dreyecke durch eine Rationalverhältniss $m : n$ so genau man will ausgedrückt werden. Der Satz, der zuerst von Rationalverhältnissen bewiesen wurde, gilt folglich auch für Irrationalverhältnisse in aller Strenge, wenn man das Maass AD $= EH$ *unendlich klein*, dagegen m und n unendlich gross annimmt.

§. 112. *Anmerkung.* Weitere Erläuterungen dieses Satzes s. m. im *Kästner Geometrie* 24ster Satz. *Euklid* giebt einen andern Beweis als den obigen, weil er nemlich die Lehre von incommensurabelen Grössen und Irrationalverhältnissen erst im zehnten Buche seiner Elemente vorträgt, so gründet er den Beweis dieses Satzes auf eine andere Erklärung der Proportion.

§. 113. *Zusatz.* Auch Parallelogramme von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien.

§. 114. *Zusatz.* Dreyecke, auch Parallelogramme, von gleichen Grundlinien, Fig. 43. verhalten sich wie ihre Höhen, denn die Dreyecke ABC, EFG sind zweyen rechtwinklichten Dreyecken KLM, OPQ gleich, welche mit jenen gleiche Grundlinie und Höhe haben. Nun sehe man nur KL, OP als die Grundlinien an, so gilt der vorige Beweis auch hier. So auch

§. 115. *Zusatz.* Dreyecke und Parallelogramme überhaupt verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundlinien und Höhen. Fig. 44. Denn man mache $HK = DB$, so verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle EKG = AC : EG$$

$$\triangle EKG : \triangle EFG = DB : HF$$

folglich $\triangle ABC : \triangle EFG = AC.DB : EG.HF$

Hieraus folgt, dass wenn die Dreyecke und Parallelogramme gleich sind, sich ihre Grundlinien umgekehrt, wie die Höhen verhalten.

§. 116. *Lehrsatz.* Wenn in einem Dreyecke ABC eine Linie ED mit der Grundlinie BC parallel gehet, so werden die Seiten AB, AC von derselben proportionirt geschnitten, das heisst: es verhält sich $AD : DB = AE : EC$. Fig. 45. (Euklid VI. 2.)

Beweis. Man ziehe CD, BE , so ist $\triangle DEB = \triangle DEC$. Nun verhält sich aber $\triangle AED : \triangle DEB = AD : DB$, folglich auch $\triangle AED : \triangle DEC = AD : DB$. Aber auch $\triangle AED : \triangle DEC = AE : EC$. Folglich $AD : DB = AE : EC$.

§. 117. *Zusatz.* Aus dieser Proportion folgt auch $AD : AE = DB : EC$, und ferner auch: $AD + DB : AE + EC = AD : AE$, das heisst: $AB : AC = AD : AE$.

§. 118. *Lehrsatz.* Wenn die beyden Seiten eines Dreyecks AB und AC von einer Linie proportionirt geschnitten werden, so ist diese Linie mit der dritten Seite CB parallel.

Beweis. Die Dreyecke EDB und EDC sind gleich, denn sie haben zu dem $\triangle AED$ gleiche Verhältniss, nemlich die $AD : DB$, welche gleich ist der $AE : EC$. Aber die Dreyecke stehen auch auf einerley Grundlinien ED , folglich stehen sie auch zwischen einerley Parallelen und ist demnach $BC \parallel DE$.

§. 119. *Lehrsatz.* Wenn in einem Dreyecke ABC eine Linie AD aus der Spitze auf die Grundlinie den Winkel an der Spitze halbt, so schneidet sie die Grundlinie den beyden Seiten proportionirt; das heisst, es verhält sich $BD : DC = BA : AC$. Fig. 46. (Euklid VI. 3.)

Beweis. Man ziehe mit AD die Linie CE parallel, bis sie sich mit der verlängerten BA

schneidet, so ist $BD:BC = BA:AE$. Aber $AE = AC$, weil $ACE = CEA$; nemlich $ACE = CAD$ und $CEA = DAB$ und CAD ist der Voraussetzung nach dem DAB gleich.

§. 120. *Zusatz.* Auch umgekehrt: wenn die Grundlinie den beyden Seiten proportionirt geschnitten wird, so halbirt AD den Winkel A .

§. 121. *Lehrsatz.* In gleichwinklichten Dreyecken sind die Seiten, von welchen gleiche Winkel eingeschlossen werden, proportionirt. Fig. 47. (Euklid VI. 4.)

Beweis. Man lege die Dreyecke ABC und DCE so aneinander, dass zwey Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberstehen, in eine gerade Linie BE und die Spitzen beyde nach einerley Seite von dieser Linie fallen, auch die gleichen Winkel nach einer Gegend hin liegen. Wenn man sodann BA und ED verlängert, bis sie sich in F schneiden, (welches immer irgendwo geschehen muss) so ist $CA \parallel EF$ und $AF = CD$. Es verhält sich aber $BA:BC = AF:CE$, folglich $BA:BC = CD:CE$, auch $BA:AC = CD:DE$.

§. 122. *Lehrsatz.* Wenn in zwey Dreyecken die Seiten proportionirt sind, so sind die Dreyecke gleichwinklicht. Fig. 48. (Eukl. VI. 5.)

Beweis. Man lege an des Dreyecks EDF Seite EF ein Dreyeck EGF , worin die Winkel FEG ,

EFG, EGF den Winkeln CBA, BCA, BAC gleich sind,

so verhält sich $BC : BA = EF : EG$ aber auch nach der Voraussetzung $BC : BA = EF : ED$ folglich ist $EG = ED$. Eben so ergibt sich, dass $GF = FD$. Mithin sind in dem Dreyecke EDF auch die Winkel denen im $\triangle EGF$, folglich auch denen im $\triangle BAC$ gleich.

§. 123. *Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ein Winkel gleich und die Seiten, welche ihn einschliessen, proportionirt sind, so sind alle Winkel gleich und alle Seiten proportionirt.* Fig. 48. (Euklid VI. 6.)

Beweis. Es sey $ABC = DEF$ und $BC : BA = EF : ED$. Man lege an EF ein Dreyeck EFG, dessen Winkel bey E, G, F den Winkeln B, A, C gleich sind,

so ist $BC : BA = EF : EG$ aber auch nach der Voraussetzung $BC : BA = EF : ED$ folglich $EG = ED$. Aber ferner der Winkel $DEF = FEG$, mithin ist in den Dreyecken DEF, FEG alles Übrige gleich, folglich sind auch $\triangle EDF$ und $\triangle ABC$ gleichwinklicht, folglich auch die Seiten alle proportionirt.

§. 124. *Anmerkung.* Dreyecke wie die §. 121, 122, 123 sind ähnliche Dreyecke. (§. 25.)

§. 125. *Lehrsatz.* Jedes rechtwinklichte Dreyeck wird durch eine aus der Spitze des

rechten Winkels auf die Hypothenuse senkrecht gezogene Linie AD in zwey Dreyecke getheilt, welche sowohl unter einander als dem ganzen Dreyecke ähnlich sind. Fig. 49. (Euklid VI. 8.)

Beweis. Im ganzen Dreyeck ABC ist bey A und den beyden kleinen Dreyecken sind bey D rechte Winkel, der Winkel B ist dem $\triangle ABC$ und dem $\triangle ABD$ gemein, so auch ist der Winkel C dem $\triangle ABC$ und dem $\triangle ADC$ gemein, folglich sind die kleinen Dreyecke dem grossen ähnlich, folglich auch unter einander.

§. 126. Zusatz. Es verhält sich $BD:DA = DA:DC$. Anderer Proportionen zu geschweigen.

§. 127. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AB nach eben der Verhältniss wie eine andere AC einzutheilen. Fig. 50. (Eukl. VI. 10.)

Auflösung. Man setze beyde unter einem beliebigen Winkel (den man nicht gern zu spitzig oder zu stumpf nimmt) aneinander, verbinde ihre Endpunkte durch eine gerade Linie CB und ziehe durch die Theilungspunkte G, F die mit CB parallelen Linien GE, FD , so sind E, D die Theilungspunkte auf der Linie AB .

Der Beweis erhellet aus §. 116.

§. 128. Aufgabe. Zu drey gegebenen Linien AB, BC, AD die vierte Proportionallinie zu finden. Fig. 51. (Euklid VI. 12.)

Auflösung. Man mache einen beliebigen Winkel, trage die beyden ersten Linien auf den einen, die dritte Linie auf den andern Schenkel, verbinde die Endpuncte des ersten und dritten durch die gerade Linie BD und ziehe durch den Endpunct des zweyten die mit BD parallele Linie CE so ist DE die gesuchte vierte Proportional-
linie.

Der Beweis erhellet aus §. 116.

§. 129. *Zusatz.* So kann man auch mehrere Linien finden, die in zusammenhängenden Verhältnissen stehen. Wenn in Fig 50. $DE = AF$, so ist $AD:AF = AF:FG$. Wenn nun wiederum $EB = FG$, so ist $AF:FG = FG:GC$. Man sieht wie dies weiter fortgesetzt werden könne.

§. 130. *Anmerkung.* Zwischen zwey gegebenen Linien eine stete oder auch zwey mittlere Proportionallinien zu finden, sind Aufgaben, die erst in der Folge aufgelöset werden, wenn Lehrsätze vom Kreise werden erwiesen seyn.

§. 131. *Lehrsatz.* Ähnliche Figuren können durch Diagonalen in ähnliche Dreyecke getheilt werden. Fig. 52.

Beweis. Da die Figuren ähnlich sind, so ist $A = a$ und $AE:AB = ae:ab$, folglich wenn man EB und eb ziehet, sind die Dreyecke EAB, eab ähnlich, und $AE:EB = ae:eb$, oder $AE:$

$ae = EB:eb$. Aber auch $AE:ae = ED:ed$, folglich $EB:eb = ED:ed$. Da nun ferner Winkel $AEB = aeb$ und $AED = aed$, so ist auch $BED = bed$, folglich $\triangle BED \sim \triangle bed$. Diese Schlüsse sind leicht auf alle folgende Dreyecke fortzusetzen.

§. 132. *Zusatz.* Wenn Figuren sich durch Diagonalen in ähnliche Dreyecke theilen lassen, so sind sie selbst einander ähnlich, welches auf eben die Art wie §. 131. erhellet.

§. 133. *Zusatz.* Wenn man eine Figur so auf die ihr ähnliche legt, dass a auf A , ae auf AE , ab auf AB fällt, so sind alle Seiten der einen Figur den Seiten der andern parallel, und umgekehrt: wenn bey einer solchen Lage die Seiten parallel liegen, so sind die Figuren ähnlich. (Vergl. Kästner Geom. 39. Satz.)

§. 134. *Aufgabe.* Eine Figur zu machen, welche einer gegebenen ähnlich sey.

Auflösung. Man mache die Winkel denen in der gegebenen Figur gleich und die Seiten proportional. Am bequemsten geschieht es, indem man die gegebene Figur durch Diagonalen in Dreyecke theilt und aus Dreyecken, die diesen ähnlich sind, die verlangte Figur zusammensetzt.

§. 135. *Lehrsatz.* Ähnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ähnlichliegender

Seiten, d. h. der Seiten, die an gleichen Winkeln liegen. Fig. 53.

Beweis. Die ähnlichen Dreyecke seyen ABC , ADE . Quadrate zweyer ähnlichliegenden Seiten $AFGC = AC^2$ und $AILE = AE^2$. Man ziehe BE . Nun ist $\triangle ABC : \triangle ABE = AC : AE$. Aber auch $AFGC : AFHE = AC : AE$ (§. 113.) folglich $\triangle ABC : \triangle ABE = AFGC : AFHE$, oder da $AFHE = AIKC$ ist, so ist auch $\triangle ABC : \triangle ABE = AFGC : AIKC$.

Ferner: $\triangle ABE : \triangle ADE = AB : AD = AC : AE$, aber auch $AIKC : AILE = AC : AE$, folglich $\triangle ABE : \triangle ADE = AIKC : AILE$.

Aus den Proportionen aber

$$\begin{array}{l} \triangle ABC : \triangle ABE = AFGC : AIKC \\ \text{und } \triangle ABE : \triangle ADE = AIKC : AILE \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{folgt } \triangle ABC : \triangle ADE = AFGC : AILE \\ \text{das ist} \qquad \qquad \qquad = AC^2 : AE^2 \end{array}$$

(Der Beweis dieses Satzes, den *Euklid* VI. 19. giebt, ist von obigem verschieden. Aus dem Satze (§. 115.) lässt sich der Beweis ebenfalls herleiten, so *Kästner* Geometr. 42. Satz. 21. Zus.)

§. 136. *Zusatz.* Ähnliche Figuren, Fig. 52. verhalten sich ebenfalls wie Quadrate ähnlichliegender Seiten. Sie lassen sich nemlich in ähnliche Dreyecke theilen.

Nun ist $\triangle AEB : \triangle aeb = AE^2 : ae^2$

$\triangle EBD : \triangle ebd = ED^2 : ed^2$

$\triangle DCB : \triangle dcb = DC^2 : dc^2$

Weil nun aber die Seiten proportional sind, so sind nach Arithm. §. 185. auch die Quadrate der Seiten proportional. Mithin kann man etwa die erste Verhältniss $AE^2 : ae^2$ statt der übrigen nehmen.

Alle Dreyecke haben also einerley Verhältniss $\triangle AEB : \triangle aeb = \triangle EBD : \triangle ebd = \triangle DCB : \triangle dcb = AE^2 : ae^2$. Folglich auch (aus Arithm. §. 190.) $\triangle AEB + \triangle EBD + \triangle DCB : \triangle aeb + \triangle ebd + \triangle dcb = AE^2 : ae^2$, das heisst, die ganzen Figuren verhalten sich wie $AE^2 : ae^2$ und überhaupt wie die Quadrate irgend anderer ähnlichliegender Seiten und auch wie die Quadrate ähnlichliegender *Diagonalen*.

§. 137. *Zusatz.* Die Perimeter ähnlicher Dreyecke und ähnlicher Figuren überhaupt verhalten sich wie die ähnlichliegenden Seiten oder Diagonalen.

§. 138. *Zusatz.* Wenn über den drey Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ähnliche Figuren, Fig. 54. beschrieben sind, so dass des Dreyecks Seiten ähnlich liegende Seiten dieser Figuren sind, so ist die über der Hypothenuse beschriebene Figur den beyden über den Catheten beschriebenen zusammengenommen gleich. (Euklid VI. 31.) Ich nenne die Hypothenuse $= a$, die beyden Catheten b und c , die ähnlichen Figuren nach der Ordnung A, B, C,

so ist $A : C = a^2 : c^2$, oder $A : a^2 = C : c^2$
 und $B : C = b^2 : c^2$, folglich auch $B \div C : C =$
 $b^2 \div c^2 : c^2$
 oder $B \div C : b^2 \div c^2 = C : c^2$, mithin $A : a^2 =$
 $B \div C : b^2 \div c^2$
 und $A = a^2 \cdot (B \div C)$, nun aber ist $a^2 = b^2 \div c^2$
 $\frac{b^2 \div c^2}{b^2 \div c^2}$

folglich heben sich diese Grössen in Zähler und
 Nenner des letzten Ausdrucks auf und es ist A
 $= B \div C$.

§. 139. *Aufgabe.* Zwey ähnliche Figuren
 sind gegeben, man soll eine dritte machen, die
 den beyden gegebenen zusammengenommen
 gleich und ihnen ähnlich sey.

Auflösung. Man setze zwey ähnlichliegen-
 de Seiten der beyden gegebenen Figuren unter
 einem rechten Winkel an einander und verbin-
 de ihre andern Endpunkte durch eine gerade Li-
 nie, welche dann die Hypothenuse eines recht-
 winklichten Dreyecks, mithin die ähnlichliegen-
 de Seite der verlangten Figur ist (§. 138.) völlig
 so wie §. 106.

§. 140. *Zusatz.* So lassen sich auch drey
 und mehrere ähnliche Figuren in eine ihnen
 ähnliche verwandeln völlig wie §. 107.

§. 141. *Aufgabe.* Zwey ähnliche Figuren
 sind gegeben, man soll eine dritte ihnen ähn-
 liche finden, die dem Unterschiede der beyden
 gegebenen gleich sey.

Auflösung. Eine unbegranzte gerade Linie wird senkrecht auf das eine Ende einer beliebigen Seite der kleinern gegebenen Figur aufgerichtet und mit der ähnlichliegenden Seite der grössern Figur durchschnitten, völlig wie §. 109.

§. 142. *Anmerkung.* Ähnliche Figuren zu machen, die eine gegebene Verhältniss zu einander haben, ist eine Aufgabe, die erst in der Folge aufgelöst werden kann, wenn Lehrsätze vom Kreise vorhergegangen sind.

V o m K r e i s e.

§. 143. *Aufgabe.* Den Mittelpunct eines gegebenen Kreises zu finden. Fig. 55. (Euclid III. 1.)

Auflösung. Man ziehe in dem gegebenen Kreise willkührlich eine gerade Linie AB, halbiere dieselbe in D, setze auf sie in D die Linie DC senkrecht, verlängere diese bis E und halbiere CE in F, so ist F der gesuchte Mittelpunct.

Beweis. Gesetzt, dass F nicht der Mittelpunct wäre, so sey es irgend ein anderer etwa G. Man ziehe GA, GD, GB. Nun ist $AD = DB$, $DG = DG$ und wenn G der Mittelpunct ist, $AG = GB$, also $ADG = GDB$, folglich jeder ein rechter Winkel. Nun ist aber auch $CDB = R$, also müsste $GDB = CDB$ seyn, welches unmöglich ist. Mithin kann kein Punct ausser F der Mittelpunct des Kreises seyn.

§. 144. *Zusatz.* Wenn eine Sehne AB, Fig. 56. von einer auf sie senkrechten Linie ED halbt wird, so geht diese ED durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 145. *Zusatz.* Wenn eine Sehne AB von einer durch den Mittelpunkt gehenden Linie CD halbt wird, so steht diese ED senkrecht auf AB, (Euklid III. 3.) denn da $AF = FB$, $AC = CB$, $CF = EF$, so ist $AFC = BFC$, jeder $= R$.

§. 146. *Zusatz.* Wenn eine Sehne AB von einer durch den Mittelpunkt gehenden Linie senkrecht durchschnitten wird, so halbt diese ED die Linie AB, (Euklid III. 3.) denn da $AC = CB$, so ist $CAB = CBA$ und $CFA = CFB$, also auch $AF = FB$. (§. 79.)

§. 147. *Lehrsatz.* Wenn im Kreise von irgend einem Punkte F, der nicht der Mittelpunkt ist, gerade Linien zum Umfange gehen, so ist die FA, worin der Mittelpunkt befindlich ist, die grösste, alle andern je weiter von FA desto kleiner, und die FD, welche mit jener den Durchmesser ausmacht, die kleinste. Fig. 57. (Euklid III. 7.)

Beweis. E sey der Mittelpunkt. Es ist $BE + EF > BF$, aber $BE + EF = AE + EF = AF$, folglich $AF > BF$. Ferner ist $BEF > CEF$, folglich $BF > CF$. (§. 53.) Eben so $CF > GF$. Ferner $GF + FE > EG$, also auch $> ED$, folglich $GF > FD$.

§. 148. *Zusatz.* Zu beyden Seiten von AD sind immer nur je zwey Linien von F nach dem Umfange einander gleich, nemlich die, welche mit AD gleiche Winkel machen. (Euklid III. 7.)

§. 149. *Lehrsatz.* Wenn von einem Punkte D ausserhalb des Kreises gerade Linien zum Umfange gezogen werden, so ist unter denen, welche die concave Peripherie treffen, die DA, die durch den Mittelpunkt geht, die grösste, und immer die, so ihr näher, grösser als die entferntere. Unter denen aber, welche die convexe Peripherie treffen, umgekehrt: die DG, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht, die kleinste, und immer die, so ihr näher, kleiner als die entferntere. Fig. 58. (Euklid III. 8.)

Beweis. Ganz dem §. 147. ähnlich,

§. 150. *Zusatz.* Zu beyden Seiten von AD sind nur je zwey Linien von D nach dem Umfange einander gleich, nemlich die, welche mit AD gleiche Winkel machen.

§. 151. *Grundsätze.* Zwey Kreise durchschneiden einander nur in zwey Puncten, und berühren einander nur in einem Puncte. Zwey Kreise, die einander durchschneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt. Concentrische Kreise, d. h. die aus einem Mittelpunkte mit verschiedenen Halbmessern beschrieben worden, haben keinen Punct gemein. Eine

gerade Linie kann einen Kreis nur zweymal schneiden. — Euklid, ein Muster geometrischer Schärfe, beweist diese Sätze. Sie können beym Unterricht durch eine leichte deductio ad impossibile erläutert werden, sind aber übrigens einleuchtend genug, um sie hier als Grundsätze herzusetzen.

§. 152. *Lehrsatz. Wenn ein Kreis den andern inwendig berührt, so trifft die gerade Linie, welche die Mittelpuncte verbindet, verlängert, den Berührungspunct der Kreise.* Fig. 59. (Euklid III. 11.)

Beweis. Der Mittelpunct des grössern Kreises sey F. Man ziehe F mit dem Berührungspunct A durch die gerade Linie AF zusammen. Gesetzt, des kleinern Kreises Mittelpunct wäre nicht in dieser Linie, so sey er irgendwo anders etwa in G. Man ziehe durch G und F die Linie HC. Nun ist in dem grössern Kreise $AG > HG$ aber im kleinern Kreise müsste, wenn G der Mittelpunct seyn sollte, $AG = GD$ seyn, mithin $GD > GH$, welches unmöglich ist.

§. 153. *Lehrsatz. Wenn ein Kreis den andern auswendig berührt, so trifft die gerade Linie, welche beyde Mittelpuncte verbindet, den Berührungspunct der Kreise.* Fig. 60. (Euklid III. 12.)

Beweis. Gesetzt, sie gienge nicht durch den Berührungspunct A, sondern anderwärts, etwa

durch C und D, so dass F und G die Mittelpunkte wären, so müsste $AF = FC$ und $AG = GD$ seyn, folglich $AF + AG = FC + GD$, also $AF + AG < FG$, welches unmöglich ist.

§. 154. *Lehrsatz. Gleiche Sehnen AB, CD sind gleichweit vom Mittelpunkte entfernt, (Euklid III. 14.) und umgekehrt. Fig. 61.*

Beweis. Man ziehe aus dem Mittelpunkte E senkrecht auf AB und CD, so ist $AF = CG$ und $AE^2 - AF^2 = EC^2 - CG^2$, das heisst: $FE^2 = EG^2$, folglich $FE = EG$.

§. 155. *Lehrsatz. Eine auf das Ende A eines Durchmessers senkrechte Linie CE ist eine Tangente, das heisst: sie berührt den Umfang nur in dem einzigen Punkte A. Alle übrige Punkte liegen ausserhalb des Kreises. Fig. 62.*

Beweis. Man nehme willkürlich einen Punkt K und ziehe DK, so ist diese grösser als DA, das heisst: grösser als der Halbmesser, weil $DAK > AKD$.

§. 156. *Zusatz. Jede Tangente steht auf dem Durchmesser oder Halbmesser am Berührungspunkte senkrecht, und eine Linie, die am Berührungspunkte auf der Tangente senkrecht steht, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.*

§. 157. *Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte A eine Tangente an den Kreis zu ziehen. Fig. 63. (Euklid III. 17.)*

Auflösung. Man ziehe von dem Mittelpuncte E nach A, beschreibe mit EA einen Kreis, richte in D eine senkrechte Linie DF auf, die jenen Kreis in F schneidet, ziehe EF, so ist B der gesuchte Punct, an welchen die Tangente von A zu ziehen ist.

Beweis. $\triangle AEB \cong \triangle EDF$, folglich $EBA = R$, mithin BA die Tangente.

§. 158. *Lehrsatz.* In jedem Kreise ist der Winkel am Mittelpunct doppelt so gross als der Winkel an der Peripherie, der mit jenem auf einerley Bogen steht. Fig. 64. (Euklid III. 20.)

Beweis. Es sind drey Fälle möglich. Entweder liegt der Mittelpunct in dem einen Schenkel des Peripheriewinkels, oder zwischen beyden Schenkeln, oder ausserhalb derselben.

Erster Fall. $BEF = 2 BAF$. Denn im $\triangle ABE$ ist $EA = EB$, also $CBA = BAE$ und $BEF = EBA + BAE = 2 BAE$ oder $2 BAF$.

Zweyter Fall. $BEC = 2 BAC$. Denn $BEF = 2 BAF$ und eben so $FEC = 2 FAC$, folglich $BEC = 2 BAC$.

Dritter Fall. $BEC = 2 BDC$. Denn $GEC = 2 GDC$ und $GEB = 2 GDB$. Mithin $GEC - GEB = 2(GDC - GDB)$, das heisst: $BEC = 2 BDC$.

§. 159. *Zusatz.* Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter, denn $ABD = \frac{1}{2} ACD = \frac{1}{2} \cdot 2 R = R$. Fig. 65. Der in einem kleinern Abschnitte ist stumpf, der in einem grössern Abschnitte ist spitzig. (Euklid III. 31.)

Alle Winkel in verschiedenen Puncten einerley Abschnitts sind einander gleich, denn jeder ist die Hälfte von einem und eben demselben Centriwinkel.

§. 160. *Aufgabe.* Auf das Ende B einer geraden Linie eine andere senkrecht aufzurichten.

Auflösung. Man nehme einen beliebigen Punct C über der gegebenen Linie, beschreibe aus demselben mit dem Halbmesser CB einen Kreis, der die gegebene Linie in A schneidet, ziehe den Durchmesser AD, so ist BD senkrecht auf AB. (Dies ist eine Ergänzung zu §. 40.)

§. 161. *Lehrsatz.* Gleiche Winkel am Mittelpuncte eines Kreises bespannen gleiche Bogen. Fig. 66. (Euklid III. 26.)

Beweis. $\triangle ACB \cong \triangle CDE$, also $AB = DE$. Man lege die Sehne AB, so auf DE, dass A auf D und B auf E falle, so muss der Bogen AB den Bogen DE decken, denn jeder Punct des erstern ist von C so weit entfernt, wie jeder Punct des letztern.

§. 162. *Zusatz.* Wenn Winkel gleiche Bogen in einem Kreise bespannen, so sind sie einander gleich. Denn da die Bogen sich decken, so müssen auch die geraden Linien zwischen ihren Endpunkten sich decken, also $AB = DE$, folgender $\triangle ABC \cong \triangle CDE$, mithin die Winkel bey C einander gleich.

§. 163. *Zusatz.* Was hier von Winkeln und Bogen in einem Kreise gesagt ist, gilt begreiflich auch von Winkeln und Bogen in zwey Kreisen von gleichen Halbmessern.

§. 164. *Zusatz.* Gleiche Sehnen in einem oder in zwey gleichen Kreisen haben gleiche Bogen und umgekehrt.

§. 165. *Zusatz.* Die senkrechte Linie durch den Mittelpunkt auf die Sehne halbt sowohl den Winkel AEB als den Bogen ADB. Fig. 56. Ein rechter Winkel am Mittelpunkt bespannt den vierten Theil des Umfangs.

§. 166. *Lehrsatz.* Der Winkel in einem beliebigen Abschnitt des Kreises AEB mit dem Winkel in dem noch übrigen Abschnitt ADB zusammen genommen sind $= 2 R$. Fig. 67.

Beweis. Man ziehe DE, so ist $EAB = EDB$ und $EBA = EDA$. Also $EAB + EBA = EDB + EDA = BDA$. Da nun $EAB + EBA + AEB = 2 R$, so ist auch $BDA + AEB = 2 R$.

Eben so ist auch $EBD + EAD = 2 R$.

Also überhaupt die Gegenwinkel einer vierseitigen geradlinichten Figur, die ihre Spitzen im Umfange eines Kreises hat $= 2 R$. (Euklid III. 22.)

§. 167. *Lehrsatz.* Der Winkel BAE , welchen eine Tangente mit der aus dem Berührungspunct gezogenen Sehne macht, ist dem Winkel ADB im entgegengesetzten Abschnitte gleich, so auch $BAF = ACB$. Fig. 68. (Euklid III. 32.)

Beweis. Man ziehe AD senkrecht auf FE , nehme willkührlich einen Punct C im Bogen AB und ziehe AC , CB . Weil AD durch den Mittelpunct geht, so ist $ABD = R = DAE = BAD + BAE$; aber auch $ADB + BAD = R$, folglich $BAE = ADB$.

Ferner $BAE + BAF = 2 R$ und auch $ADB + ACB = 2 R$ (§. 166.) da nun $BAE = ADB$, so ist auch $BAF = ACB$.

§. 168. *Aufgabe.* Wenn eine Sehne AB und der Winkel im Abschnitte E , den sie bespannt, gegeben sind, den Halbmesser des Kreises zu finden. Fig. 69.

Auflösung. Man setze an das Ende der Sehne einen Winkel EAD , der dem gegebenen Winkel im Abschnitte gleich ist, so wird AD die Tangente aus den Punct A seyn, und eine auf sie senkrechte Linie AG geht durch den Mit-

telpunct. Eine Linie FH auf die Mitte der Sehne senkrecht aufgerichtet, geht ebenfalls durch den Mittelpunct. Mithin ist der Durchschnittspunct C der Mittelpunct des Kreises.

Ist der gegebene Winkel im Abschnitte ein rechter, so braucht man bloss die gegebene Sehne zu halbiren.

(Euklids 33. Satz enthält wesentlich dasselbe.)

§. 169. *Lehrsatz.* In jedem Kreise lassen sich reguläre Vielecke beschreiben. Fig. 70.

Beweis. Man kann den Umfang des Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt denken, dass also die Bogen $AB = BC = CD$ u. s. w. sind. Folglich sind auch die Sehnen, d. h. die *Seiten* des Vielecks gleich. Ferner ist der Bogen $AB + BC = BC + CD$, also auch ihre Ergänzungen zum ganzen Umfang nemlich die Bogen $AEC = BFD$, folglich auch die *Winkel*, welche auf diesen Bogen stehen, $ABC = BCD$. Folglich ist die Figur, welche die gleichen Sehnen einschliessen, eine reguläre Figur.

§. 170. *Zusatz.* Die Halbmesser GA, GB, GC u. s. w. theilen das reguläre Vieleck in deckende Dreyecke, weil alle drey Seiten in jedem Dreyecke allen drey Seiten eines andern gleich sind.

§. 171. *Zusatz.* Die Halbmesser halbiren folglich die Winkel, welche die Sehnen mit einander machen.

§. 172. *Lehrsatz.* Um jedes reguläre Vieleck lässt sich ein Kreis beschreiben, so dass des Kreises Umfang durch alle Spitzen der Winkel des Vielecks geht.

Beweis. Man halbire zwey Winkel des Vielecks wie A und B durch die Linien AG und BG. Dass diese irgendwo in G zusammenstossen müssen, ist klar, weil jeder Vieleckswinkel (Polygonwinkel) wie $A < 2 R$, folglich die Hälfte $< R$ ist, da nun $A = B$, so ist auch $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$, folglich $GB = GA$. Man ziehe GC, so sind im $\triangle GBC$ zwey Seiten GB, GC und der zwischenliegende Winkel $\frac{1}{2}B$ so gross wie im $\triangle GAB$, folglich auch $GC = GB = GA$. Eben so bey den übrigen Dreyecken. Folglich alle Linien von G zu den Winkelspitzen des Polygons einander gleich, mithin G der Mittelpunkt eines Kreises vom Halbmesser GA.

§. 173. *Zusatz.* Der Polygonwinkel eines regulären Vielecks von n Seiten ist $= \frac{(n-2) 2 R}{n}$.

Der Centriwinkel AGB $= \frac{4 R}{n}$.

§. 174. *Zusatz.* Im regulären Sechseck ist der Centriwinkel dem halben Polygonwinkel
N 2

gleich, denn wenn $n = 6$, so ist der Centriwinkel $AGB = \frac{4}{6} R = \frac{2}{3} R$, der halbe Polygonwinkel $GAB = GBA = \frac{(n-2)R}{n} = \frac{4}{6} R = \frac{2}{3} R$. Hieraus folgt, dass das $\triangle AGB$ ein gleichseitiges Dreyeck sey, weil alle drey Winkel einander gleich sind, dass also $AB = GA$, d. h. die Seite eines regulären Sechsecks dem Halbmesser gleich sey.

§. 175. *Zusatz.* Ein reguläres Sechseck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, braucht man also nur den Halbmesser in die Peripherie herumzutragen, welches gerade sechsmal angeht.

§. 176. *Zusatz.* Ein reguläres, d. h. gleichseitiges Dreyeck in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, braucht man die Endpunkte zweyer an einander liegenden Seiten des Sechsecks durch die geraden Linien FB , BD , DF zu verbinden. Fig. 71.

§. 177. *Zusatz.* Ein reguläres Viereck, das ist: ein Quadrat in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, setze man zwey Durchmesser CA , DB senkrecht auf einander und verbinde ihre Endpunkte durch gerade Linien AB , BC , CD , DA . Fig. 72.

§. 178. *Zusatz.* Durch Halbierung der Bogen findet man aus einem Polygon ein anderes von noch einmal so viel Seiten: aus dem Sechs-

eck das Zwölfeck, aus diesem das Vierundzwanzigeck u. s. w. aus dem Viereck das Achteck, aus diesem das Sechzehneck u. s. w.

§. 179. *Anmerkung.* Das vierte Buch der Elemente Euklids handelt ganz von Beschreibung regulärer Polygone *in* und *um* gegebene Kreise und von Beschreibung der Kreise *in* und *um* gegebene reguläre Polygone. Ausser dem Dreyeck, Viereck, Sechseck lehrt Euklid auch noch das Fünfeck und Funfzehneck (nemlich letzteres durch Dreyeck und Fünfeck) beschreiben, weshalb er im dritten Buch den 35, 36 und 37sten Satz vorausschickt, welche sich wiederum auf die Sätze von den Rechtecken aus den Abschnitten einer geraden Linie gründen, welche wir aber übergangen haben. (s. §. 110.)

§. 180. *Anmerkung.* Man würde im Stande seyn, jedes reguläre Polygon von gegebener Anzahl Seiten zu beschreiben, wenn man jeden Winkel zu zeichnen wüsste. Wir haben aber bis jetzt nur den rechten Winkel und die, welche daraus durch Halbierung erhalten werden, zu machen gelernt. Hat man ein Mittel, jeden beliebigen Winkel an einen Punct anzusetzen, so braucht man um ein Polygon in einen gegebenen Kreis zu beschreiben, nur den *Centriwinkel*, und um ein Polygon auf eine gegebene Seite zu beschreiben, nur den *Polygonwinkel* zu beschreiben, woraus sich dann alles Übrige ergibt.

§. 181. *Lehrsatz.* Ein reguläres Vieleck ist einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie dem ganzen Umfange (Perimeter) des Vielecks, dessen Höhe aber der senkrechten Linie vom Mittelpunkte auf eine Seite des Vielecks gleich ist.

Fig. 70.

Beweis. Das Vieleck wird durch die Halbmesser in gleiche Dreyecke getheilt, welche einerley Höhe haben, in der 57sten Figur GH. Ihre Grundlinien zusammengenommen machen den Perimeter des Vielecks aus. Also folgt der Satz nach §. 100.

§. 182. *Zusatz.* Je grösser die Anzahl der Seiten eines Polygons ist, desto weniger ist die Höhe der Dreyecke, worin es durch die Halbmesser getheilt wird, von der Grösse des Halbmessers unterschieden, so ist z. B. die Höhe GL grösser als die GH (da schon im rechtwinklichten $\triangle GKH$ die $GK > GH$ ist) folglich GL weniger vom Halbmesser unterschieden als GH. Fig. 71.

§. 183. *Zusatz.* Die Seiten des Polygons kommen also dem Umfange des Kreises immer näher, je grösser die Anzahl der Seiten ist. Um desto weniger ist auch der Perimeter des Polygons vom Umfange des Kreises unterschieden. Das Sechseck z. B. in Fig. 71 hat einen grössern Perimeter als das Dreyeck, denn in jedem Dreyecke wie FAB ist $FA + AB > FB$, folglich

ist der Perimeter des Sechsecks weniger vom Umfange des Kreises unterschieden als der Perimeter des Dreyecks, welche Schlüsse auf alle folgende Vielecke von doppelt so vielen Seiten fortgesetzt werden können.

§. 184. *Zusatz.* Ferner ist klar, dass je grösser die Anzahl der Seiten, um desto weniger auch der Flächeninhalt des Polygons vom Flächeninhalte des Kreises unterschieden sey. Das Sechseck z. B. in Fig. 71. hat einen grössern Flächeninhalt als das Dreyeck und kömmt also dem Flächeninhalt des Kreises näher als das Dreyeck und so kann man auf Vielecke von immer mehreren Seiten fortschliessen.

§. 185. *Zusatz.* Nun kann man sich aber Vielecke von so vielen Seiten denken, dass ihre Seiten um etwas ganz Unbeträchtliches von den Bogen, den sie bespannen, folglich ihr Perimeter vom ganzen Umfange des Kreises und ihr Flächeninhalt vom Flächeninhalte des Kreises ebenfalls um etwas ganz Unbeträchtliches unterschieden wären. Man kann sich also den Kreis als ein Polygon von unendlich vielen Seiten vorstellen.

§. 186. *Zusatz.* Die Höhe der Dreyecke, worin ein solches Polygon durch die Halbmesser getheilt wird, muss dann nothwendig unendlich wenig vom Halbmesser selbst unterschieden seyn. Hieraus folgt: *Ein Kreis ist einem Drey-*

ecke gleich, dessen Grundlinie dem Umfange des Kreises, dessen Höhe aber dem Halbmesser gleich ist.

(Ausführlichere Erläuterungen lese man in Kästners Anfangsgr. Geom. 41. Satz und Karstens Lehrbegr. I. Geom. V. Abschn. §. 138 bis §. 150.)

§. 187. *Lehrsatz. In gleichen Kreisen verhalten sich die Winkel am Mittelpunkt wie die Bogen zwischen ihren Schenkeln.* (Eukl. VI. 33.)

Beweis. Wenn die Bogen AB und EF commensurabel sind, so sey $AD = EH$ eine Länge, womit sowohl AB als EF genau gemessen werden, und es sey $AB = m \cdot AD$ und $EF = n \cdot EH = n \cdot AD$, folglich $AB:EF = m \cdot AD:n \cdot AD = m:n$. Offenbar finden nun im Winkel ACB auch m solcher Winkel Statt wie ACD einer ist, oder es ist $ACB = m \cdot ACD$. Und eben so ist $EGF = n \cdot EGH$. Aber weil $AD = EH$, so ist $ACD = ECH$, mithin $EGF = n \cdot ACD$. Also $ACB:EGF = m \cdot ACD:n \cdot ACD = m:n$. Folglich $ACB:EGF = AB:EF$. Fig. 73.

Sind die Bogen incommensurabel, so lässt sich doch ihre Irrationalverhältniss durch eine Rationalverhältniss $m:n$ so nahe ausdrücken, dass der Fehler verschwindet. (Weitere Ausführung s. m. im Kästner Geom. 22. Satz 11. und 12. Zusatz.)

§. 188. *Zusatz.* Da die Winkel an der Peripherie die Hälften von den Winkeln am Mittelpunkte sind, so verhalten sich auch jene wie die Bogen zwischen ihren Schenkeln.

§. 189. *Zusatz.* Es erhellet, dass sich die Ausschnitte ACB und EGF eben so wie die Winkel, das heisst: wie die Bogen verhalten.

§. 190. *Lehrsatz.* Bogen in ungleichen Kreisen, die von gleichen Winkeln bespannt werden, verhalten sich wie die Peripherien der Kreise.

Beweis. Wenn aus dem Scheitel eines rechten Winkels ein Kreis beschrieben wird, so ist der Bogen, der zwischen die Schenkel des rechten Winkels fällt, der vierte Theil der Peripherie. (§. 132.) Sind also $P; p$ die Peripherien zweyer ungleichen Kreise, so sind die Bogen, welche zwischen den rechten Winkeln fallen, $\frac{1}{4}P; \frac{1}{4}p$, welche sich also wie $P : p$ verhalten. Sind $A; a$ zwey gleiche Winkel, so sey jeder $= \frac{1}{n} R$, folglich die Bogen zwischen ihren Schen-

keln in dem einen Kreise $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4}P$ in dem an-

dern Kreise $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4}p$, welche sich ebenfalls wie $P : p$ verhalten.

§. 191. *Lehrsatz. Die Perimeter ähnlicher regulären Polygone verhalten sich wie die Halbmesser und Durchmesser der Kreise, in welchen sie beschrieben sind..* Fig. 74.

Beweis. Die Perimeter verhalten sich wie die Seiten AB, DE. Aber wegen Ähnlichkeit der Dreyecke ACB, DFE ist $AB:DE = CA:FD$, folglich auch $= 2CA:2FD$.

§. 192. *Zusatz.* Von den Perimetern ähnlicher regulären Polygone, die um den Kreis beschrieben sind, lässt sich eben das zeigen.

§. 193. *Zusatz.* Die Peripherien der Kreise verhalten sich folglich auch wie die Halbmesser und Durchmesser, da man einen Kreis als ein Polygon von unendlich vielen Seiten ansehen kann. Wenn P; p die Peripherien, D; d die Durchmesser zweyer verschiedener Kreise bedeuten, so ist also $P:p = D:d$, auch $P:D = p:d$, das heisst: die Verhältniss des Umfanges zum Durchmesser oder des Durchmessers zum Umfange ist in allen Kreisen dieselbe. Dieser merkwürdigen Verhältniss wird in der Folge noch mit Mehrerem erwähnt werden.

§. 194. *Lehrsatz. Die Flächenräume ähnlicher regulärer Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser und Durchmesser der Kreise, in welchen sie beschrieben sind.* Fig. 74. (Euklid XII. 1.)

Beweis. Sie verhalten sich wie die Quadrate der Seiten $AB; DE$, aber wegen Ähnlichkeit der Dreyecke $ACB; DFE$ ist $AB:DE = CA:FD$, oder auch $= 2CA:2FD$, folglich auch $AB^2:DE^2 = CA^2:FD^2 = (2CA)^2:(2FD)^2$

§. 195. *Zusatz.* Von den Perimetern um den Kreis beschriebener ähnlicher Polygone erhellet die Sache auf ähnliche Art.

§. 196. *Zusatz.* Kreise verhalten sich ebenfalls wie die Quadrate ihrer Halbmesser und Durchmesser. (Euklid XII. 2.) Es seyen zwey Kreise $K; k$, ihre Peripherien $P; p$, ihre Durchmesser $D; d$. Nun ist K einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie $= P$, Höhe $= \frac{1}{2}D$, und eben so k einem Dreyecke, dessen Grundlinie $= p$ Höhe $= \frac{1}{2}d$ wäre. Diese Dreyecke aber verhalten sich (§. 159.) wie $P \cdot \frac{1}{2}D : p \cdot \frac{1}{2}d = PD:pd$. Also $K:k = PD:pd$, weil aber $P:D = p:d$ (§. 193.) folglich $\frac{D}{P} = \frac{d}{p}$ so ist auch $K:k = \frac{PD \cdot D}{P} : \frac{pd \cdot d}{p} = DD:dd = D^2:d^2$ folglich auch wie die Quadrate der Halbmesser.

Die Sätze §. 138 bis 141 sind daher auch auf Kreise anwendbar.

§. 197. *Lehrsatz.* Wenn zwey Sehnen sich in einem Kreise schneiden, so sind die Abschnitte der einen Sehne die mittlern Propor-

tionallinien zwischen den Abschnitten der andern. Fig. 75.

Beweis. Die beyden Sehnen AB; DE durchschneiden sich in F. Man ziehe AE; DB, so ist $\triangle AFE \sim \triangle DFB$, weil nemlich bey F die Scheitelwinkel gleich und bey A und D so auch bey E und B Winkel an der Peripherie, die auf einerley Bogen stehen, sich gleich sind. Es verhält sich also $AF:EF = DF:BF$, oder auch $EF:AF = BF:DF$, oder auch $AF:DF = EF:BF$.

§. 198. *Zusatz.* Schneiden die beyden Sehnen einander senkrecht wie in der 56sten Figur und die eine geht durch den Mittelpunkt, so wird die andere, die nicht durch den Mittelpunkt geht, dadurch halbirt, so dass $AF = BF$, daher sich denn die Proportion §. 197 $EF:AF = BF:DF$ in folgende verwandeln lässt: $EF:AF = AF:DF$, das heisst: AF ist die mittlere Proportionale zwischen EF und DF wie §. 174.

§. 199. *Lehrsatz.* Wenn sich zwey verlängerte Sehnen ausserhalb des Kreises schneiden, so verhalten sich die ganzen Linien umgekehrt wie die Abschnitte ausser dem Kreise. Fig. 76.

Beweis. Die Dreyecke AEF; DBF sind ähnlich, weil der Winkel F gemeinschaftlich und die Winkel A; D gleich sind, mithin verhält sich $AF:DF = EF:BF$.

§. 200. *Lehrsatz.* Wenn sich eine verlängerte Sehne und eine Tangente ausserhalb des Kreises schneiden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen verlängerten Sehne und ihrem Abschnitt ausser dem Kreise. Fig. 77. a.

Beweis. Die Dreyecke ADF und BDF sind ähnlich, denn der Winkel F ist gemeinschaftlich und $\angle BAD = \angle BDF$. (§. 167.) Es ist folglich $AF:DF = DF:BF$.

Dieser Satz lässt sich auch als Zusatz zu §. 199. herleiten, wenn man nemlich in Fig. 76. die Linie FD weiter fortrücken lässt, bis sie den Kreis nur berührt, so wird $DE = 0$, folglich $DF = EF$, woraus denn die obige Proportion ebenfalls folgt.

§. 201. *Anmerkung.* Die Sätze §. 197 und 200 sind dieselben, welche beym *Euklid* III. 35. 36. nur etwas anders ausgedrückt stehen. *Euklid* aber beweist sie auf eine andere Art, weil er sie vor der Lehre von Verhältnissen und Ähnlichkeit vorträgt, als welche letztere erst im sechsten Buche enthalten ist. Es ist nützlich, hier und bey mehreren andern Sätzen die verschiedenen Wege zu vergleichen, durch welche man zur Überzeugung gelangt.

§. 202. *Lehrsatz.* In jedem Dreyecke ABC sind Summe und Unterschied der beyden klei-

nern Seiten AC ; CB die mittlern Proportionalgrößen zwischen Summe und Unterschied der beyden Abschnitte der grössern Seite AD ; DB , welche durch eine auf sie senkrechte Linie aus der Spitze C abgeschnitten werden. Fig. 77. b.

Beweis. Man beschreibe aus C mit der kleinsten Seite CB einen Kreis und verlängere AC bis E so ist $AB:AE = AF:AG$. (§. 199.) Aber AB ist die Summe der beyden Abschnitte AD ; DB , AE ist gleich der Summe der beyden Seiten AC ; CB , AF ist gleich dem Unterschiede der beyden Seiten AC ; CB , AG ist gleich dem Unterschiede der beyden Abschnitte AD ; DB , weil $DB = DG$ ist.

§. 203. *Aufgabe.* Eine gerade Linie so zu theilen, dass der grössere Abschnitt die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Abschnitte sey. Fig. 78.

Auflösung. Auf das Ende B der geraden Linie AB richte man $BC = \frac{1}{2}AB$ senkrecht auf, beschreibe mit CB einen Kreis, ziehe AE , welche den Kreis in F schneidet, mache $AG = AF$, so ist dies die gesuchte Linie.

Beweis. Es ist $AE:AB = AB:AF$ (§. 200)
 folglich auch $AB:AE = AF:AB$
 oder auch $AB:AE - AB = AF:AB - AF$
 welches aus Arithmetik §. 175 folgt. Nun aber ist $AB = FE$, also $AE - AB = AE - FE = AF$

und dies $= AG$ und ferner $AB - AF = AB - AG = GB$. Sonach wird obige Proportion in folgende verwandelt:

$$AB : AG = AG : GB.$$

§. 204. *Anmerkung.* An dieser Stelle können auch Euklids Sätze von Beschreibung des regulären Fünfecks. (Euklid IV. 11 bis 14) bewiesen werden, wozu III. 37. (ein Zusatz zu §. 200) und IV. 10. vorhergehen müssen. (Von den Winkeln des Fünfecks bringt Euklid noch ganz am Ende des dreyzehnten Buchs einen Lehrsatz bey.)

§. 205. *Aufgabe.* Zu zwey gegebenen geraden Linien die mittlere stete Proportionallinie zu finden. Fig. 79.

Auflösung. Man setze die beyden gegebenen Linien $AB; BC$ in eine gerade Linie AC an einander, halbire diese in E , beschreibe einen Halbkreis und richte in B die senkrechte Linie BD auf, diese ist die gesuchte. Der Beweis folgt aus §. 158 und §. 125.

§. 206. *Aufgabe.* Zu zwey gegebenen geraden Linien $AD; AC$ zwey mittlere Proportionallinien zu finden, deren Unterschied gegeben ist. Fig. 80.

Auflösung. Man setze beyde gegebene Linien in gerader Linie an einander und durch A eine senkrechte Linie HK und mache AB dem

gegebenen Unterschiede der gesuchten Linien gleich. Halbire AB in E und CD in F, setze senkrechte Linien auf E und F, die sich in G schneiden. Beschreibe mit dem Halbmesser $GD = GC$ einen Kreis, so sind AH; AK die gesuchten Linien.

Beweis. Dass AH; AK mittlere Proportionallinien zu AD; AC sind, ist aus §. 197 klar. Dass aber ihr Unterschied $= AB$ sey, erhellet daraus, weil E die Mitte sowohl von AB als von HK ist, mithin $EK - EB = EH - EA$, das heisst: $BK = HA$, also $AK - BK = AB = AK - HA$.

§. 207. *Aufgabe.* Zu zwey gegebenen geraden Linien AD; AC zwey mittlere Proportionallinien zu finden, deren Summe gegeben ist. Fig. 81.

Auflösung. Man trage die beyden gegebenen Linien von A aus auf eine gerade Linie und auf eine durch A senkrechte Linie trage man die Summe der gesuchten Linien $= AB$, halbire AB in E und CD in F, setze senkrechte Linien auf E und F, die sich in G schneiden, beschreibe mit dem Halbmesser $GD = GC$ einen Kreis, so sind AH; AK die gesuchten Linien.

Beweis. Dass AH; AK mittlere Proportionallinien zu AD; AC sind, ist aus §. 199 klar. Dass aber ihre Summe $= AB$ sey, erhellet daraus, weil E sowohl AB als HK halbirt, folglich

$KB = AH$ und $HB = AK$, also $AH + HB = AB = AH + AK$.

§. 208. *Anmerkung.* Wenn die Aufgabe: zu zwey gegebenen Linien ein Paar mittlere Proportionallinien zu finden, ohne weitere Bedingungen gegeben wäre, so wäre sie unbestimmt; man könnte unzählige Paare von Linien angeben, welche der Aufgabe Genüge thäten. So sind Fig. 76. die Abschnitte der Linie DE die mittlern Proportionallinien zwischen den Abschnitten der Linie AB, aber von jeder andern Sehne, welche die AB in F durchschneidet, würde eben das gelten.

§. 209. *Aufgabe.* Eine Figur zu zeichnen, die n mal so gross als eine gegebene und zugleich dieser gegebenen ähnlich sey.

Auflösung. Es sey eine Seite der gegebenen Figur $= a$. Man suche die mittlere Proportionallinie zwischen der Linie a und einer n mal so langen Linie. Diese mittlere Linie, welche $= \alpha$ heissen mag, ist die mit a ähnlichliegende Seite der gesuchten Figur, worauf die Figur nach §. 134 verzeichnet wird.

Beweis. Es muss sich verhalten die gegebene Figur zur gesuchten wie $a^2 : \alpha^2$, und nach der Bedingung sollen die Figuren sich auch verhalten wie $1 : n$. Folglich ist $1 : n = a^2 : \alpha^2$ und $\alpha^2 = na^2$. Hieraus folgt die Proportion $a : \alpha = \alpha : na$, der die obige Auflösung gemäss ist.

Grundbegriffe der Stereometrie.

§. 210. *Erklärung.* Eine gerade Linie steht *senkrecht* auf einer Ebene, wenn sie mit allen geraden Linien, welche durch den Punct, wo sie auf der Ebene steht, in dieser Ebene gezogen werden können, rechte Winkel macht.

§. 211. *Erklärung.* Wenn von irgend einem Puncte C einer geraden Linie AB, welche in B auf die Ebene eintrifft, eine senkrechte Linie CD auf die Ebene gefällt wird, so ist der Winkel ABD die Neigung oder der *Neigungswinkel* der Linie gegen die Ebene. Die Linie CD heisst das *Neigungslot*. Fig. 82.

Wenn $\angle ABD = R$ ist, so fällt CD in AB selbst.

§. 212. *Grundsatz.* Eine gerade Linie bleibt immer, so weit man sie auch verlängert, in einer Ebene und es kann nicht ein Theil einer geraden Linie in einer Ebene und ein Theil in einer andern Ebene liegen. (Euklid XI. 1.)

§. 213. *Grundsatz.* Drey Puncte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene. Fig. 83. Es sey eine gerade Linie AB in der Ebene KLMN und ein Punct ausser AB sey C. Nun lässt sich die Ebene um AB drehen. Hätte man sie so gedreht, dass C in ihr läge, so kann man sie nicht weiter drehen, ohne dass C wieder *ausser* ihr komme, mithin ist nur eine einzige Lage möglich, wo die Puncte A, B, C in ihr liegen.

§. 214. *Zusatz.* Wenn also eine Ebene durch die Punkte A, B, C geht, so ist keine andere Ebene möglich, die auch durch eben diese drey Punkte ginge oder durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, findet nur *eine* Ebene Statt.

§. 215. *Zusatz.* Der Durchschnitt zweyer Ebenen MN und KL ist eine gerade Linie, denn der Durchschnitt muss in beyden Ebenen zugleich liegen; wäre er nun nicht eine gerade Linie AB, sondern etwa eine krumme Linie ACB, so könnte diese nicht in beyden Ebenen zugleich seyn, weil durch drey Punkte A, C, B, die nicht in gerader Linie liegen, nur *eine* Ebene Statt findet. Fig. 84.

§. 216. *Zusatz.* Aus 214 folgt, dass jedes Dreyeck und jeder geradlinichte Winkel ganz in *einer* Ebene liegen müsse.

§. 217. *Erklärung.* Eine Ebene ist senkrecht auf einer andern Ebene, wenn eine auf den Durchschnitt der Ebenen senkrechte Linie in der einen Ebene auf die andere Ebene ebenfalls senkrecht ist. So sind die Ebenen, Fig. 85. a. senkrecht auf einander, wenn AB in der einen Ebene nicht nur mit dem Durchschnitt EF, sondern auch mit jeder in der andern Ebene gezogenen geraden Linie wie BC, BD rechte Winkel macht.

§. 218. *Erklärung.* Die *Neigung* oder der Neigungswinkel zweyer Ebenen ist der Winkel ABC, welchen zwey in jeder Ebene auf den Durchschnitt senkrecht gezogene Linien AB, BC mit einander machen. Ist dieser Winkel $= R$, so sind die Ebenen, Fig. 85. b. senkrecht auf einander.

§. 219. *Erklärung.* *Parallele Ebenen* sind solche, welche nirgends zusammenstossen, so weit man sie auch nach allen Seiten hin erweitert.

§. 220. *Erklärung.* Ein *körperlicher Winkel* (eine *Ecke*) ist die Neigung wenigstens dreyer Linien gegen einander, wovon immer nur zwey in einer Ebene liegen und die in einen Punct zusammentreffen.

§. 221. *Erklärung.* Ein *Prisma* (Ecksäule, Pfeiler) ist ein Körper, der von zwey parallelen gleichen und ähnlichen ebenen Grundflächen und von so viel Parallelogrammen als jede Grundfläche Seiten hat begränzt wird. Diese Parallelogramme heissen die Seitenflächen des Prismas. Je nachdem die Grundflächen drey, vier . . . Seiten haben ist das Prisma ein dreyseitiges, vierseitiges u. s. w. Ein *Parallelopipe-dum* ist ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind.

§. 222. *Erklärung.* Ein *Cylinder* ist ein Prisma, dessen Grundflächen zwey gleiche Kreise sind. Die Parallelogramme, welche die Sei-

tenfläche bilden, sind hier unendlich schmal und bilden eine gekrümmte Fläche. Die gerade Linie zwischen den Mittelpuncten der Grundflächen heisst die *Axe*.

§. 223. *Erklärung.* *Senkrecht* heisst ein Prisma, wenn die Seitenflächen mit den Grundflächen rechte Winkel machen. Wenn dieses nicht ist, so heisst es ein *schiefes* Prisma. Ein senkrechter Cylinder entsteht, wenn ein Rechteck sich um eine seiner Seiten herumdreht.

§. 224. *Erklärung.* Eine *Pyramide* (Spitzsäule) ist ein Körper, welcher begränzt wird von einer ebenen Grundfläche und von so viel Dreyecken als jene Seiten hat, deren Spitzen in einem Puncte ausser der Grundfläche vereinigt sind. Eine Pyramide ist dreyseitig, vierseitig u. s. w. je nachdem die Grundfläche drey, vier und mehrere Seiten hat.

§. 225. *Erklärung.* Ein *Kegel* ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist. Die Dreyecke, welche die Seitenflächen bilden, verlieren sich hier in eine gekrümmte Fläche. Die gerade Linie vom Mittelpuncte der Grundfläche zur Spitze heisst die *Axe* des Kegels.

§. 226. *Erklärung.* *Senkrecht* heisst ein Kegel, wenn die *Axe* senkrecht auf die Grundfläche steht, im Gegenfalle heisst er *schief*. Ein senkrechter Kegel entsteht, wenn ein rechtwink-

lichtes Dreyeck sich um eine seiner Catheten herumdreht.

§. 227. *Erklärung.* Eine *Kugel* entsteht, wenn ein Halbkreis sich um seinen Durchmesser herumdrehet. Die *Kugelfläche* ist eine gekrümmte Fläche, welche vom Umfange des Halbkreises beschrieben wird, indem dieser sich dreht. Jeder Punct der Kugelfläche ist vom Mittelpuncte des Halbkreises um dessen Halbmesser entfernt, daher ist der Mittelpunct des Halbkreises zugleich der Mittelpunct der Kugel, so auch jenes Halbmesser und Durchmesser sind Halbmesser und Durchmesser der Kugel.

§. 228. *Erklärung.* Körper, welche von regulären ebenen Figuren begränzt werden, heissen reguläre Körper. Es giebt deren folgende fünf.

Das *Tetraëdram*, ein Körper, der von vier gleichen und gleichseitigen Dreyecken begränzt wird.

Das *Hexaëdram* oder der *Cubus*, (Würfel) ein senkrechtcs Parallelopipedum, das von sechs gleichen Quadraten begränzt wird. Ein Cubus hat sechs Seiten, acht Ecken, zwölf Kanten, (d. h. Durchschnitte zweyer Seitenflächen.)

Das *Octaëdram*, ein Körper, der von acht gleichen und gleichseitigen Dreyecken begränzt wird.

Das *Dodecaëdram*, ein Körper, der von zwölf gleichen und regulären Fünfecken begränzt wird.

Das *Icosaëdram*, ein Körper, der von zwanzig gleichseitigen und gleichen Dreyecken begränzt wird.

§. 229. *Anmerkung*. Die alten Geometer beschäftigten sich viel mit Betrachtung dieser Körper und ihre Theorie derselben ist immer eine nützliche Übung des Scharfsinns, ob sie gleich nicht viel practischen Nutzen zu haben scheint. *Euklid* handelt von den regulären Körpern, die auch Platonische genannt werden, im dreyzehnten Buche. Auch kann man sich darüber belehren aus *Karstens* Lehrbegriff II. Th. 25. und 26. Abschn. Der 25. Abschnitt enthält eine allgemeine Theorie der eckigen Körper, nach *Eulers* Element. doct. solidorum, und eben desselben Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa, sunt praedita in den Nov. Comment. Petrop. IV. Tom. *Proclus* behauptet, *Euklid* habe der Theorie der platonischen Körper wegen seine ganzen Elemente aufgesetzt. Die Neuern behandeln diese Materie analytisch und wenden sphärische Trigonometrie dabey an. Wir werden hier nichts weiter davon vortragen, daher wir bloss in dieser Anmerkung anzeigen, wo man sich weiter davon unterrichten kann.

§. 230. *Anmerkung.* Man kann aus Pappe u. dgl. Netze machen, d. h. in einer Ebene gezeichnete und nachher ausgeschnittene Figuren, woraus sich geometrische Körper als Prismata, Pyramiden und die ordentlichen Körper zusammenlegen lassen. Anweisungen sie zu zeichnen, findet man unter andern in *Wolfs* Elementen. Auch Kugeln werden aus Segmenten zusammengelegt. Im strengsten Verstande ist es zwar nicht möglich auf diese Art Kugeln, wohl aber kugelhähnliche Körper zu machen.

Von körperlichen Figuren,

die von ebenen geradlinichten Figuren begrenzt werden.

§. 231. *Lehrsatz.* Wenn in einer Ebene zwey gerade Linien CD , FE einander durchschneiden und auf denselben in ihrem Durchschnittspuncte B eine dritte gerade Linie AB senkrecht steht, so ist dieselbe auch auf die Ebene senkrecht. Fig. 86. (Euklid XI. 4.)

Beweis. Man ziehe durch B willkührlich eine gerade Linie GH . Mache $BF = BE$ und $BD = BC$. Ziehe DF und EC , so ist I) $\triangle FBD \cong \triangle EBC$, folglich $DF = CE$, und die Winkel bey D und C einander gleich. So ist auch II) $\triangle BDG \cong \triangle BCH$ und folglich $DG = CH$ und $GB = HB$. Ferner ist III) $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ und IV) $\triangle ABF \cong \triangle ABE$, daher also $AD = AC$,

$AF = AE$ und vorhin schon $DF = EC$, folglich V) $\triangle ADF \cong \triangle ACE$ und die Winkel $ADF = ACE$. Weil aber auch $DG = CH$ und $AD = AC$ war, so ist VI) $\triangle ADG \cong \triangle ACH$ und folglich $AG = AH$. Endlich VII) decken sich also auch die Dreyecke ABG und ABH , weil alle drey Seiten in ihnen gleich sind, folglich ist AB auch auf GH senkrecht, d. h. auf jeder durch B nach Gefallen in der Ebene gezogenen Linie, oder welches einerley ist, auf die Ebene überhaupt.

§. 232. *Zusatz.* Drey einander in einem Punkte B berührende oder schneidende Linien, auf denen eine vierte AB in B senkrecht steht, liegen in einer Ebene. (Euklid XI. 5.) Denn gesetzt, dass zwar BF und BG in einer Ebene lägen, aber BD über der Ebene BFG , so sey irgend eine andere Linie BI (die so wie BD in der aufstehenden Ebene ABD ist) in der Ebene BFG . Wäre nun dieses, so müsste ABI ein rechter Winkel seyn. (§. 231.) Aber der Voraussetzung nach ist schon ABD ein rechter Winkel. Jenes ist also unmöglich.

§. 233. *Lehrsatz.* Zwey gerade Linien AB , CD , die beyde auf einerley Ebene BDE senkrecht stehen, sind parallel. Fig. 87. (Euklid XI. 6.)

Beweis. In der Figur sey $DE = AB$ gemacht und der Winkel $BDE = R$ gemacht, so ist $\triangle$

$\triangle ABD \cong \triangle DBE$, folglich $AD = BE$, ferner $\triangle ABE \cong \triangle AED$, weil alle drey Seiten gleich; folglich da $\angle ABE = R$ ist auch $\angle AED = R$ also DE ist auf AD , BD , CD senkrecht, mithin liegen diese letztern und mit ihnen auch AB in einerley Ebene ABD . Und da nun $\angle ABD + \angle BDC = 2 R$, so ist $AB \parallel CD$.

§. 234. *Zusatz.* Wenn von zwey Parallelen AB , CD die eine AB senkrecht auf die Ebene DBE ist, so ist auch die andere CD senkrecht auf diese Ebene. Denn wie in §. 233 ist $\angle EDA = R$, also ED sowohl auf DA als DB , folglich auf die Ebene BAD und die darin befindliche CD senkrecht. Also $\angle CDE = R$ und auch $\angle CDB = R$, weil $\angle ABD = R$ ist, folglich CD senkrecht auf die Ebene DBE . Fig. 87. (Eukl. XI. 8.)

§. 235. *Zusatz.* Wenn zwey Linien AB , CD mit einer dritten EF parallel sind, so sind sie unter sich selbst parallel, wenn gleich nicht alle drey in einer Ebene sind. Denn man ziehe DE in der Ebene $CDEF$ auf EF senkrecht und eben so BE in der Ebene $ABEF$, so ist nun EF auf die Ebene EBD senkrecht, folglich sind die mit EF parallelen Linien AB , CD auch auf eben diese Ebene senkrecht, (§. 234.) mithin unter sich parallel. (§. 233.) Fig. 87. (Eukl. XI. 9.)

§. 236. *Lehrsatz.* Zwey Winkel ABC und DEF , die nicht in einer Ebene liegen, sind gleich, wenn ihre Schenkel AB , DE und BC ,

EF einander parallel sind. Fig. 88. (Euklid XI. 10.)

Beweis. Man nehme $AB = ED$, $BC = EF$, so werden $ABED$ und $BCFE$ Parallelogramme, folglich AD , CF gleich und parallel des BE , mithin auch unter sich. Also ist auch $ACDF$ ein Parallelogramm und $AC = DF$. Daher in den Dreyecken ABC , DEF alle drey Seiten und folglich auch die Winkel gleich sind.

§. 237. *Aufgabe.* Auf eine Ebene von einem über ihr gegebenen Punkte A eine senkrechte Linie zu fällen. Fig. 89. (Eukl. XI. 11.)

Auflösung. Man ziehe willkührlich in der gegebenen Ebene die Linie BC und auf sie senkrecht AD . Wenn diese nicht schon selbst senkrecht auf die Ebene ist, so ziehe man DE senkrecht auf BC und von A auf DE eine senkrechte Linie AF , diese ist die gesuchte.

Beweis. BC ist auf DA und DE , folglich auf die Ebene ADE senkrecht, folglich die ihr Parallele GH ebenfalls, also AF ist senkrecht auf GH , aber auch auf DE , folglich auf die Ebene überhaupt.

§. 238. *Zusatz.* Aus einem gegebenen Punkte A kann auf eine gegebene Ebene nur eine senkrechte Linie AF Statt finden.

§. 239. *Aufgabe.* Aus einem in einer Ebene gegebenen Punkte D eine senkrechte Linie aufzurichten. Fig. 89. (Euklid XI. 12.)

Auflösung. Aus einem beliebigen Punkte A über der Ebene falle man nach §. 237 AF senkrecht auf die Ebene und ziehe mit AF die DK parallel.

§. 240. *Zusatz.* Auf einer Ebene können aus einem Punkte nicht mehr als eine senkrechte Linie aufgerichtet werden.

§. 241. *Lehrsatz.* Wenn auf einer Ebene eine Linie senkrecht ist, so ist jede durch diese Linie gesetzte Ebene auf jene erste Ebene senkrecht. Fig. 90. (Euklid XI. 18.)

Beweis. Es sey AB senkrecht auf die Ebene DE . Eine durch AB gesetzte Ebene GF schneide die Ebene DE in HF , welche Linie durch B geht. Man ziehe CB senkrecht auf HF , so ist ABC der Neigungswinkel der Ebene GF , aber weil AB senkrecht auf die Ebene DE steht, so ist $ABC = R$, also die Ebene GF auch senkrecht auf DE .

§. 242. *Zusatz.* Zwey sich schneidende Ebenen sind auf die Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht, denn sowohl DBA als DBC sind rechte Winkel, also DB oder DE senkrecht auf die Ebene des Neigungswinkels ABC , also auch

jede durch DE gelegte Ebene senkrecht auf die Ebene ABC. Fig. 86.

§. 243. *Zusatz.* Wenn zwey Ebenen auf einander senkrecht sind und in der einen eine Linie AB auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt FH senkrecht ist, so ist eben diese AB auch auf die andere Ebene überhaupt senkrecht. Fig. 90.

§. 244. *Lehrsatz.* Wenn man Fig. 86. aus A eine senkrechte Linie AF auf die Ebene DCE herunterfället, so trifft diese in den Schenkel BC des Neigungswinkels beyder Ebenen ein.

Beweis. Die Ebene des Neigungswinkels ist senkrecht auf die Ebene DCE. §. 242. Irgend eine Linie also aus dem Puncte A in der Ebene des Neigungswinkels auf den Durchschnitt BC senkrecht gezogen, ist auf die Ebene DCE senkrecht. §. 243. Da nun AF der Voraussetzung gemäss wirklich senkrecht auf die Ebene DCE ist und aus einem Puncte A nicht mehr als eine senkrechte Linie auf eine Ebene Statt findet, §. 238. so kann jene in der Ebene des Neigungswinkels angenommene senkrechte Linie keine andere als AF selbst seyn, oder AF muss in der Ebene des Neigungswinkels liegen. Der Punct F also, wo AF in die Ebene DCE eintrifft, liegt zugleich in der Ebene des Neigungswinkels, mithin im Durchschnitt beyder Ebenen, das heisst: in der Linie BC.

§. 245. *Lehrsatz. Zwey Ebenen, auf denen eine gerade Linie AB senkrecht ist, sind parallel. Fig. 91. (Euklid XI. 14.)*

Beweis. Man ziehe in der einen Ebene AC und in der andern BD, welche zugleich in der Ebene CAB liege, so sind $CAB = ABD = R$. Sollten nun die Ebenen zusammenstossen, so müssten auch AC und BD zusammenstossen, welches unmöglich ist, da $CAB + ABD = 2R$.

Auch umgekehrt: Wenn zwey Ebenen parallel sind und eine Linie auf eine derselben senkrecht ist, so ist sie auch auf die andere senkrecht.

§. 246. *Lehrsatz. Wenn zwey in einer Ebene zusammentreffende gerade Linien AB, BC zweyen in einer andern Ebene zusammentreffenden DE, EF parallel sind, so sind die beyden Ebenen auch parallel. Fig. 92. (Euklid XI. 15.)*

Beweis. Eine Linie BG von B auf die Ebene DF senkrecht gefället stehet auch auf die Ebene AC senkrecht, denn da AB mit DE parallel ist nach der Voraussetzung, so ist AB auch mit GH parallel, wenn diese letztere mit ED parallel gezogen wird. Da nun $HGB + GBA = 2R$, aber $HGB = R$, so ist auch $GBA = R$. Ebenso erhellet, dass auch $GBC = R$, folglich GB auch auf die Ebene AC senkrecht sey.

§. 247. *Lehrsatz.* Wenn zwey parallele Ebenen AC , DF von einer dritten Ebene ABG durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien AB , GH parallel. Fig. 92. (Euclid XI. 16.)

Beweis. Wären AB , GH nicht parallel, sondern stiessen in irgend einem Puncte zusammen, so müsste dieser Punct, der in beyden Linien zugleich läge, auch in beyden Ebenen AC , DF zugleich liegen, weil die Linien in diesen Ebenen liegen, d. h. die Ebenen müssten zusammenstossen, der Voraussetzung zuwider.

§. 248. *Zusatz.* Zwey Parallelebenen AC , DF , die von einer dritten AK durchschnitten werden, machen mit ihr gleiche Neigungswinkel $CBG = IGK$. Fig. 92. (Kästn. 47. S. 6. Z.)

§. 249. *Zusatz.* Wenn zwey Ebenen AC , DF von einer dritten AK so durchschnitten werden, dass sie nach einerley Seite hin gleiche Neigungswinkel machen und die Durchschnittslinien parallel sind, so sind die Ebenen AC , DF selbst parallel. (Kästn. 47. S. 7. Z.)

§. 250. *Zusatz.* Parallellinien auf einerley Ebene machen mit derselben gleiche Neigungswinkel. (Kästn. 47. S. 8. Z.)

§. 251. *Lehrsatz.* Wenn auf einer Ebene zwey einander schneidende Ebenen AB , BC senkrecht sind, so ist deren Durchschnittslinie

BD auf jener ersten Ebene ebenfalls senkrecht.
Fig. 93. (Euklid XI. 19.)

Beweis. Man lasse in der Ebene AB die Linie BD senkrecht auf AD herab, so steht BD senkrecht auf der untern Ebene. Man lasse in der andern Ebene BC auch vom Punkte B eine Linie senkrecht auf DC herab, diese kann nun vermöge §. 238. keine andere als BD seyn und diese steht also auch auf die untere Ebene senkrecht, ist aber auch in beyden stehenden Ebenen zugleich oder ist deren Durchschnitt.

§. 252. *Anmerkung.* Euklid beweist hier (XI. 20. 21.) noch Sätze von körperlichen Winkeln, welche wir nur *erwähnen*, z. B. dass die ebenen Winkel, welche einen körperlichen einschliessen, immer zusammen kleiner als vier rechte sind. In diesem Satze liegt der Grund, warum nicht mehr als *fünf reguläre Körper* möglich sind. (Euklid XIII. letzte Anmerkung.)

§. 253. *Lehrsatz.* Wenn ein Prisma parallel mit der Grundfläche ABC durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt DEF der Grundfläche gleich und ähnlich. Fig. 94.

Beweis. Die Seiten des Durchschnitts und der Grundfläche sind Parallelen zwischen Parallelen, folglich einander gleich, und die Winkel sind ebenfalls gleich, nach §. 236. folglich sind die Figuren selbst deckend.

§. 254. *Lehrsatz. Jedes Parallelepipedum wird durch die Diagonalebene CDEF halbart.*
Fig. 95. (Euklid XI. 28.)

Beweis. Die Dreyecke CGF, CBF und DAE, DHE so wie die Parallelogramme CA, BE und GE, CH sind einander gleich, die Diagonalebene aber ist beyden Körpern, welche durch sie abgeschnitten werden, gemein. Also sind beyde Körper völlig in einerley Gränzen eingeschlossen und man kann einen in den Raum des andern setzen, so dass alle Gränzen auf einander fallen, die Körper decken sich also und jeder ist die Hälfte des Ganzen.

§. 255. *Lehrsatz. Parallelepipeda auf einerley Grundfläche und zwischen einerley Parallelebenen (oder von einerley Höhe) sind einander gleich.* Fig. 96. (Euklid XI. 29. 30.)

Beweis. I. Die Seitenflächen FK, DB des ersten seyen mit denen GK, EB des andern in einer Ebene, so ist das Prisma FGADEC mit dem LMKHIB congruent (deckend). Wenn nun beyderseits der Körper EK hinzu kommt, so ist $AH = AI$.

II. Sind die vorhin genannten Seitenflächen nicht in einer Ebene, so ist das zweyte Parallelepipedum AI einem dritten Ah gleich. (nach I.) Dieses aber ist wiederum den ersten AH gleich, (nach I.) folglich ist auch $AI = AH$. Fig. 97.

§. 256. *Anmerkung.* Man wird die Ähnlichkeit dieses Beweises mit dem von Gleichheit der Parallelogramme §. 88. bemerken. Der Kürze wegen haben wir bloss den Fall betrachtet, da die Ebene AE zwischen AD und KH fällt, man kann leicht auch für die Fälle den Beweis fortführen, wenn GE in LH oder jenseits LH liege. (vergl. Kästner 54. 55. Satz.)

§. 257. *Anmerkung.* Der Beweis aus Gleichheit der Durchschnitte ist zwar bequemer und kann sogleich auf Prismata überhaupt ausgedehnt werden, weshalb viele Neuere, *Wolf, Segner* u. a. m. denselben in den Anfangsgründen gewählt haben, allein er ist nicht so bündig, daher wir nach Art der Alten Alles aus der Congruenz herleiten.

§. 258. *Zusatz.* Jedes Parallelepipedum ist also einem senkrechten gleich, welches mit ihm *einerley* Grundfläche und gleiche Höhe hat.

§. 259. *Zusatz.* Ein senkrechtcs Parallelepipedum CM, welches das schiefwinklichte Parallelogramm CI zur Grundfläche hat, ist einem andern senkrechten CL gleich, welches das Rechteck CH zur Grundfläche hat, welches völlig wie §. 255. I. erhellet. Fig. 98.

§. 260. *Zusatz.* Aus 258, 259 folgt, dass Parallelepipeda einander gleich sind, wenn ihre Höhen gleich und ihre Grundflächen *Parallelo-*

gramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind.

§. 261. *Lehrsatz. Parallelepipeda von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich.*
Fig. 99.

Beweis. Die Körper seyen AD, dessen Grundfläche AB ist, und DC, dessen Grundfläche BC ist. Man setze sie so an einander, dass die Eckseite (Kante) DB des einen die eben so genannte Eckseite des andern decke und dass die grössere Seite der Grundfläche des einen KB mit der kleinern Seite der Grundfläche des andern BI, und umgekehrt LB mit BM in gerader Linie liege. Beyde Körper mögen zuerst rechtwinklicht seyn. Wenn man die Seiten der Parallelelogramme verlängert bis sie sich in E und F schneiden, so entstehen dadurch die Parallelelogramme BE, BF. Nun ergiebt sich aus §. 115, dass sich verhalte $BL:EA = FL:FA$ und dass F, B, E in einer geraden Linie liegen. GF ist daher eine Diagonalebene, die das grosse Parallelepipedium halbt. Es ist folglich das Prisma $AHG = CHG$. Aber auch Prisma $KDG = MDG$ und $LDH = IDH$. Wenn man KDG und LDH von AHG wegnimmt, so bleibt das Parallelepipedium AD übrig, und wenn man MDG und IDH von CHG wegnimmt, so bleibt das Parallelepipedium DC übrig, mithin $AD = DC$.

Da endlich jedes schiefe Parallelepipedium nach §. 258. und §. 259. auf ein senkrechtes

und rechtwinklichtes gebracht werden kann, so erhellet die Allgemeinheit des Satzes,

§. 262. *Anmerkung.* In einigen Lehrbüchern wird dieser Satz (§. 261.) nicht besonders bewiesen, sondern als Zusatz statt dessen gesetzt, der hier §. 260 steht. Allein in diesem Zusatze werden noch solche Grundflächen vorausgesetzt, die nicht nur gleich an Flächenraum sondern auch Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind. Für andere gleiche Grundflächen aber ist ein besonderer Beweis nöthig. *Euklid* XI. 31. beweist den Satz auf eine andere Art, nämlich indem er darthut, dass beyde Parallelepipeda zu einem und eben demselben dritten einerley Verhältniss haben. Es scheint jedoch der systematischen Ordnung gemässer die *Gleichheit* der Körper unabhängig von *Verhältniss* der Körper zu beweisen und die Lehren, welche letztere betreffen, erst auf die von der erstern folgen zu lassen, wie wir es auch bey den ebenen sowohl geradlinichten Figuren als Kreisen beobachtet haben.

§. 263. *Zusatz.* Mehrere Parallelepipeda von gleicher Höhe sind zusammen genommen so gross wie ein einziges Parallelepipedium von eben der Höhe, dessen Grundfläche so gross ist wie die Grundflächen jener ersten zusammen genommen.

§. 264. *Lehrsatz.* Ein dreyeckiges Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedums von gleicher Höhe und doppelt so grosser Grundfläche.

Beweis. Das Prisma sey ACF. Fig. 95. Man setze an dessen Seite CE ein congruentes Prisma HCF, so entsteht das Parallelepipedum AB, von welchem das Prisma ACF die Hälfte ist. Aber dieses Parallelepipedum ist jedem andern von gleicher Grundfläche und Höhe gleich, folglich ist auch das Prisma ACF die Hälfte eines jeden andern Parallelepipedums, welches wie das gezeichnete dieselbe Höhe wie das Prisma aber eine doppelt so grosse Grundfläche hätte.

§. 265. *Zusatz.* Jedes vieleckige Prisma lässt sich durch Diagonalebene in dreyeckige theilen. Fig. 100. Jedes dieser letztern ist nach (§. 264.) die Hälfte eines Parallelepipedums von gleicher Höhe und doppelter Grundfläche, mithin ist die Summe jener Prismaten halb so gross als die Summe dieser Parallelepipedum, d. h. das vieleckige Prisma ist halb so gross als ein Parallelepipedum von gleicher Höhe, dessen Grundfläche doppelt so gross als die Grundfläche des vieleckigen Prismas.

§. 266. *Zusatz.* Folglich sind Prismata überhaupt einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben, da die Parallelepipedum, deren Hälften sie sind, einander gleich sind. (§. 261.)

§. 267. *Zusatz.* Mehrere Prismata von gleicher Höhe sind zusammen genommen einem einzigen Prisma von eben der Höhe gleich, dessen Grundfläche so gross ist wie die Grundflächen jener ersten zusammen genommen.

§. 268. *Lehrsatz.* Wenn eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so ist der Durchschnitt der Grundfläche ähnlich. Fig. 101.

Beweis. Aus §. 236. folgt, dass die Winkel der Grundfläche und des Durchschnitts gleich sind. Die Seiten aber sind proportional. So verhält sich zum Beyspiel $BC:FG = CA:GA$, aber auch $CD:GH = CA:GA$, folglich $BC:FG = CD:GH$ oder $BC:CD = FG:GH$ und so bey allen übrigen.

§. 269. *Zusatz.* Die Grundfläche und der Durchschnitt verhalten sich wie die Quadrate der Höhen. Denn es ist $BD:FH = BC^2:FG^2 = AC^2:AG^2 = AD^2:AE^2$.

§. 270. *Zusatz.* Wenn zwey Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen in gleicher Höhe parallel mit der Grundfläche durchschnitten werden, so sind die Durchschnitte gleich, denn sie haben zu den gleichen Grundflächen gleiche Verhältnisse.

§. 271. *Lehrsatz.* Wenn in einer Pyramide zwey mit der Grundfläche parallele Durch-

schnitte unendlich nahe an einander gelegt werden, so ist das zwischen ihnen liegende Stück der Pyramide unendlich wenig von einem Prisma unterschieden, welches einen der Durchschnitte zur Grundfläche und ihre Entfernung zur Höhe hat. Fig. 102.

Beweis. Es sey ABC eine Pyramide, von der die Figur nur eine Seite darstellt. Man durchschneide dieselbe in DE und KL, so ist das Stück der Pyramide, was zwischen diesen Durchschnitten liegt, *kleiner* als das Prisma DG, dessen Grundfläche der untere Durchschnitt, und *grösser* als das HL, dessen Grundfläche der obere Durchschnitt wäre, beyder Höhen der Entfernung der Durchschnitte gleich gesetzt = KH.

Je näher aber die Durchschnitte einander liegen, desto geringer wird ihr Unterschied und man kann KL so nahe an DE legen, dass es um etwas ganz Unbeträchtliches kleiner ist als DE. Wenn man also die Entfernung beyder Durchschnitte *unendlich* klein annimmt, so verschwindet der Unterschied derselben oder sie können als gleich angesehen werden.

Alsdann wird das Pyramidenstück einem *Prisma* gleich, dessen Grundfläche einer der Durchschnitte und dessen Höhe die unendlich kleine Entfernung beyder Durchschnitte ist.

§. 272. *Lehrsatz. Pyramiden von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.*
Fig. 102.

Beweis. Wenn man in zwey solchen Pyramiden in jeder zwey Durchschnitte DE, KL und de, kl in gleichen Höhen über der Grundfläche und so nahe an einander legt, dass man die Pyramidenstücke DELK, delq ohne Fehler als Prismata ansehen kann, so sind diese Prismata, weil sie gleiche Höhen PQ, pq und gleiche Grundflächen DE, de haben, einander gleich. Weil aber $AM = am$ und $PQ = pq$ ist, so finden in jeder Pyramide *gleichviel* solcher *gleicher* Prismen Statt. Mithin sind beyde einander gleich.

§. 273. *Anmerkung.* Wir sagten oben §. 257. die Beweisart aus Gleichheit der Durchschnitte sey nicht bündig genug. Diese Einwendung findet aber nicht gegen *diesen* Beweis §. 272. Statt. Hier wird nicht aus Gleichheit von *Durchschnitten*, sondern aus (schon aus der Congruenz erwiesener) Gleichheit von *Prismen* auf Gleichheit der Pyramiden geschlossen, und dass letzteres im strengsten Verstande gelte, wenn man den Prismen eine unendlich geringe Höhe giebt, erhellet aus §. 271.

§. 274. *Anmerkung.* Die Gleichheit der Dreyecke von gleichen Grundlinien und Höhen in der ebenen Geometrie kann auf ähnliche Art

bewiesen werden, indem man sie in Parallelogramme von unendlich geringer Höhe theilt. Allein dort konnte man sie leichter aus dem Satze herleiten, dass diese Dreyecke *Hälften* gleicher Parallelogramme sind und brauchte also den *Methodum indivisibilium* nicht zu Hülfe zu nehmen. Könnte man hier *unabhängig* von §. 272. und *vor* diesem Satze bloss aus Congruenz beweisen, dass Pyramiden die *Drittel* von Prismen sind, die mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben, so würde man auch hier den *methodum indivisibilium* entbehren und den Satz §. 272. aus §. 266. folgern können.

§. 275. *Zusatz.* Mehrere Pyramiden von gleicher Höhe sind zusammengenommen einer einzigen Pyramide von eben der Höhe gleich, deren Grundfläche so gross ist, als die Grundflächen jener ersten zusammengenommen.

§. 276. *Lehrsatz.* Ein dreyeckiges Prisma lässt sich in drey gleiche dreyeckige Pyramiden theilen. (Euklid XII. 7.)

Beweis. Man ziehe in den Seitenflächen des Prismas die Diagonalen. Die Ebenen, die durch je zwey solcher Diagonalen gelegt werden, nemlich AEC und AEF, theilen das Prisma in die drey Pyramiden AEDF, EBAC, EACF. Nun haben die beyden ersteren die gleichen Grundflächen $EDF = BAC$ und gleiche Höhen; die *erste* und *zweyte* Pyramide sind folglich gleich.

Bey der dritten aber sey die Grundfläche ACF und die Spitze in E. Nun aber kann man bey der ersten auch DAF als Grundfläche ansehen, deren Spitze dann ebenfalls in E liegt, da nun $ACF = DAF$ und die Spitzen in einem Puncte liegen, mithin die Höhen gleich sind, so ist auch die *dritte* Pyramide der ersten, folglich alle drey einander gleich. Fig. 103.

§. 277. *Zusatz.* Eine jede der dreyeckigen Pyramiden, worin das dreyeckige Prisma getheilt wird, ist der dritte Theil dieses Prismas, folglich auch eines *jeden* Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, es mag dreyeckig seyn oder nicht; und wegen §. 272. ist *jede* Pyramide der dritte Theil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

§. 278. *Anmerkung.* Euklid lässt vor dem Satze §. 276. die Sätze von *Verhältniss* der Pyramiden von gleicher Höhe hergehen, wesentlich ist übrigens sein Beweis derselbe wie hier.

§. 279. *Lehrsatz.* Wenn ein Parallelepipedium AB von einer Ebene CD parallel mit den Seiten AG, FB geschnitten wird, so verhalten sich die Abschnitte AD, CB wie deren Grundflächen AE, EF. Fig. 104. (Euklid XI. 25.)

Beweis. Es seyen AC und CF commensurabel und $AC = m \cdot AH$, $CF = n \cdot AH$. Man ziehe HK parallel mit AL, so ist $AE = m \cdot AK$,

$EF = n \cdot AK$ und $AE:EF = m:n$. Aber auch wenn man HI parallel mit AG setzt, ist $AD = m \cdot AI$, $CB = n \cdot AI$, also auch $AD:CB = m:n = AE:EF$.

Sind AC und CF incommensurabel, so lässt sich doch eine Rationalverhältniss $m:n$ angeben, welche der Irrationalverhältniss $AC:CF = AE:EF = AD:CB$ so nahe ist als man will.

§. 280. *Lehrsatz. Parallelepipeda von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.* Fig. 105. (Euklid XI. 32.)

Beweis. Das erste Parallelepipedium sey AC , das zweyte DF , wenn man nun an HE das Parallelogramm $EG = AB$ macht und das Parallelepipedium FG zeichnet, so ist $FG = AC$. Aber es ist §. 279. $DF:FG = DE:EG$, folglich ist auch $DF:AC = DE:AB$.

§. 281. *Zusatz.* Aus §. 266. folgt, dass auch *Prismata* überhaupt sich wie ihre Grundflächen verhalten wenn ihre Höhen gleich sind.

§. 282. *Zusatz.* Aus §. 277. folgt, dass auch *Pyramiden* von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. (Euklid XII. 5. 6.)

§. 283. *Lehrsatz. Parallelepipeda von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.* Fig. 106.

Beweis. Das erste Parallelepipedum sey AB, das zweyte CD und $AE = CI$. Auf das zweyte setze man ein drittes GH, dessen Grundfläche GD der Grundfläche des zweyten CI deckend und dessen Höhe DH der Höhe des ersten EB gleich sey, so ist $GH = AB$. Aber $CD : GH = IK : KH = ID : DH = ID : EB$. Also auch $CD : AB = ID : EB$. Was hier, der Bequemlichkeit wegen, für senkrechte Körper bewiesen wird, gilt auch für schiefe, wegen §. 258.

§. 284. *Zusatz.* Folglich verhalten sich auch überhaupt *Prismata* von gleichen Grundflächen wie ihre Höhe, wegen §. 266.

§. 285. *Zusatz.* Auch *Pyramiden* von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen, wegen §. 277.

§. 286. *Lehrsatz.* *Parallelepipeda verhalten sich überhaupt wie die Producte aus den Grundflächen in die Höhen.* Fig. 107.

Beweis. Man durchschneide das höhere Parallelepipedum in der Höhe des erstern $CH = EB$ parallel mit der Grundfläche, so ist

$$AB : CI = AE : CF \text{ (§. 280.)}$$

$$CI : CD = EB : CK \text{ (§. 283.)}$$

folglich $AB : CD = AE \cdot EB : CF \cdot CK$.

Dass dieses nicht bloss für die gezeichneten senkrechten, sondern auch für alle schiefe Pa-

rallelepipedum gelte, bedarf keiner weitem Erwähnung.

§. 287. *Zusatz.* Wenn also Parallelepipedum einander gleich sind, so verhalten sich ihre Grundflächen umgekehrt wie ihre Höhen, und wenn die Grundflächen sich umgekehrt wie die Höhen verhalten, so sind die Parallelepipedum einander gleich. (Euklid XI. 34.)

§. 288. *Zusatz.* Da die Grundflächen der Parallelepipedum Parallelogramme sind und diese sich wie die Producte aus den Grundlinien und Höhen verhalten, so verhalten sich Parallelepipedum wie die Producte aus ihren *Längen, Breiten* und *Höhen* (wenn man die Grundlinien und Höhen der Parallelogramme, welche sie zu Grundflächen haben, Längen und Breiten der Körper nennt) oder die Verhältniss der Parallelepipedum ist aus den Verhältnissen der Längen, Breiten und Höhen zusammengesetzt. Es sey eines

Parallelepipedum	Länge	Breite	Höhe	Grundfläche
p	a	b	c	d
π	α	β	γ	δ

so ist $p:\pi = cd:\gamma\delta$ (§. 286.)

aber $d:\delta = ab:\alpha\beta$

oder $d:ab = \delta:\alpha\beta$

folglich $\frac{ab}{d} = \frac{\alpha\beta}{\delta}$

$$\text{mithin } p:\pi = \frac{cd.ab}{d} : \frac{\gamma\delta.\alpha\beta}{\delta}$$

$$\text{oder } p:\pi = abc:\alpha\beta\gamma.$$

§. 289. *Zusatz.* Sind überdem die genannten drey *Dimensionen* in zwey solchen Körpern proportionirt, das heisst: verhält sich $a:\alpha = b:\beta = c:\gamma$, so verhalten sich die Körper wie die Cubi zweyer gleichnamigen Dimensionen.

(Euklid XI. 33.) Denn es ist alsdann $\beta = \frac{\alpha b}{a}$

und $\gamma = \frac{\alpha c}{a}$, also die obige Verhältniss $abc:\alpha\beta\gamma$

$$= abc:\frac{\alpha^3 bc}{a^2} = a^3 bc:\alpha^3 bc = a^3:\alpha^3.$$

Man nennt Parallelepipeda, wo dieses Statt findet und deren Seitenflächen unter gleichen Winkeln gegen einander und gegen die Grundflächen geneigt sind, *ähnliche* Parallelepipeda. (Kästn. 57. S. 8. 9. 10. Zus.)

§. 290. *Zusatz.* So wie die vorigen Sätze so gelten auch die Sätze §. 286. 287. von *Prismen* und *Pyramiden*.

§. 291. *Anmerkung.* Bey dem Euklid findet man die Sätze von Verhältnissen der Pyramiden im zwölften Buche der Elemente weitläufiger jeden besonders bewiesen. Die Neuern verkürzen sich die Beweise dadurch, dass sie

den Satz von Gleichheit der Pyramiden wie er im §. 272. bewiesen ist, voranschicken und sodann von den Prismen auf ihre Drittel die Pyramiden schliessen. Euklid beweist zuerst den Satz: Dreyeckige Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen. Sein Beweis verdient nachgelesen zu werden. (XII. 5.) Er braucht darin schon den Begriff des *Unendlichkleinen*, ob er gleich den Ausdruck vermeidet. Der Satz, den er zu diesem Beweise braucht, ist: *Jede dreyeckige Pyramide lässt sich in zwey gleiche einander selbst und der ganzen ähnliche dreyeckige Pyramiden und in zwey gleiche Prismata theilen, welche letztern zusammen grösser als die Hälfte der ganzen Pyramide sind.* (XII. 3.) Nun findet bey jeder der beyden kleinern Pyramiden wieder eben die Theilung Statt, und so erhellet, dass man durch eine solche in Gedanken immer fortgesetzte Theilung auf immer kleinere Pyramiden kommen müsse, dass diese kleiner als jede gegebene Grösse werden und dass man dann annehmen könne die ganze Pyramide sey in Prismen getheilt.

Euklid bedient sich übrigens bey diesen wie bey so vielen andern Beweisen der *deductio ad impossibile*.

*Von körperlichen Figuren,
die nicht von ebenen geradlinichten Figuren
begränzt werden.*

§. 292. *Lehrsatz. Wenn ein Cylinder mit der Grundfläche parallel durchschnitten wird, so ist die Durchschnitsfigur ein Kreis der Grundfläche gleich.*

Beweis. Der Cylinder kann als ein Prisma von unendlich vielen Seiten und seine Grundfläche als ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten betrachtet werden, mithin gilt das, was für Prismata §. 253. bewiesen ist, auch für den Cylinder.

§. 293. *Lehrsatz. Cylinder von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.*

Beweis. Da der Cylinder als ein prismatischer Körper anzusehen ist, so erhellet dieses aus §. 266.

§. 294. *Zusatz. Mehrere Cylinder von gleicher Höhe zusammen genommen, sind einem einzigen Cylinder von eben der Höhe gleich, dessen Grundfläche so gross ist wie die Grundflächen jener ersten zusammen genommen. (wie §. 267.)*

§. 295. *Lehrsatz. Die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundlinie dem Umfange*

der Grundfläche, dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist.

Beweis. Denn man kann sie als die Summe unendlich vieler, unendlich schmalen Rechtecke ansehen, die alle gleiche Höhe haben, welche folglich zusammen einem einzigen Rechtecke von eben der Höhe gleich sind, welches die Summe jener Grundlinien, d. h. den Umfang der Grundfläche des Cylinders zu seiner Grundlinie hat.

§. 296. *Anmerkung.* Man kann sich vorstellen, dass die krumme Fläche des senkrechten Cylinders parallel mit der Achse durchschnitten und sodann *abgewickelt* und in eine *Ebene* gelegt würde, da sie denn das beschriebene Rechteck geben müsste. Umgekehrt: wenn das Rechteck um den Cylinder *aufgewickelt* wird, so wird es die krumme Fläche desselben decken.

§. 297. *Zusatz.* Die krumme Fläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe seinem Durchmesser gleich ist, ist viermal so gross als seine Grundfläche. Denn das *Dreyeck*, was den Umfang des Kreises zur Grundlinie und den *Halbmesser* zur Höhe hätte, wäre so gross als der Kreis. Das Dreyeck, welches bey eben der Grundlinie den *Durchmesser* zur Höhe hätte, wäre folglich *doppelt* so gross als der Kreis, mithin endlich ist ein *Rechteck* was den Umfang zur Grundlinie und den Durchmesser zur Höhe hat,

viermal so gross als der Kreis oder als die Grundfläche des Cylinders.

§. 298. *Zusatz.* Die krumme Fläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe seinem Durchmesser gleich ist, ist daher auch einem Kreise von doppelt so grossem Durchmesser gleich. Denn da die Kreise sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder Durchmesser verhalten, so ist ein Kreis von doppeltem Durchmesser viermal so gross als der vom einfachen.

§. 299. *Zusatz.* Die ganze Fläche eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe seinem Durchmesser gleich ist, ist folglich *sechsmal* so gross als seine Grundfläche (so wie die ganze Oberfläche des *Cubus* ebenfalls sechsmal so gross als seine Grundfläche ist.)

§. 300. *Lehrsatz.* Wenn ein Kegel mit der Grundfläche parallel geschnitten wird, so ist die Durchschnichtsfigur ein Kreis.

Beweis. Ein Kegel kann wie eine Pyramide von unendlich vielen Seiten und seine Grundfläche wie ein reguläres Polygon von unendlich vielen Seiten angesehen werden. Mithin gilt das, was §. 268. von Pyramiden bewiesen ist, auch vom Kegel.

§. 301. *Zusatz.* Grundfläche und Durchschnitt verhalten sich auch beym Kegel wie die Quadrate der Höhen. (§. 269.)

§. 302. *Zusatz.* Wenn Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen in gleicher Höhe parallel mit der Grundfläche durchschnitten werden, so sind die Durchschnitte einander gleich. (§. 270.)

§. 303. *Lehrsatz.* Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

Beweis. Da der Kegel wie eine Pyramide angesehen werden kann, so erhellet dieses aus §. 272.

§. 304. *Zusatz.* Mehrere Kegel von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen Kegel von eben der Höhe gleich, dessen Grundfläche so gross ist wie die Grundflächen jener ersten zusammengenommen.

§. 305. *Lehrsatz.* Der Kegel ist ein Drittel des Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat. (Euklid XII. 10.)

Beweis folgt aus §. 276. 277.

§. 306. *Anmerkung.* Euklid beweist diesen Satz besonders und zwar auch durch eine deductio ad impossibile.

§. 307. *Lehrsatz.* Die krumme Fläche eines senkrechten Kegels ist einem Dreyecke gleich, welches die Seite des Kegels zur Höhe, den Umfang seiner Grundfläche aber zur Grundlinie hat.

Beweis. Die krumme Fläche kann als eine Summe unzählig vieler schmalen Dreyecke angesehen werden, deren Spitzen in der Spitze des Kegels beysammenliegen, deren Grundlinien aber den Umfang der Grundfläche ausmachen und deren Summe folglich einem einzigen Dreyecke gleich ist, welches die Seite des Kegels zur Höhe und den Umfang seiner Grundfläche zur Grundlinie hat.

§. 308. *Anmerkung.* Man kann sich vorstellen, dass die krumme Fläche des senkrechten Kegels in gerader Linie von der Spitze zum Umfange der Grundfläche, oder welches einerley ist, in einer durch die Axe gehenden Ebene durchschnitten, sodann abgewickelt und in eine Ebene gelegt würde, so würde sie einen Ausschnitt eines Kreises darstellen. Der Halbmesser desselben wäre die Seite des Kegels, der Bogen dem Umfang der Grundfläche gleich. Umgekehrt wenn dieser Ausschnitt auf den Kegel aufgewickelt wird, so deckt er die krumme Oberfläche desselben.

§. 309. *Anmerkung.* Nach 296, 308. lassen sich Netze für Cylinder und Kegel zeichnen, aus welchen sich diese Körper zusammen legen lassen.

§. 310. *Lehrsatz.* Wenn eine Kugel mit einer Ebene durchschnitten wird, so ist die Durchschnichtsfigur ein Kreis. Fig. 108.

Beweis. Man lasse aus dem Mittelpuncte der Kugel eine senkrechte Linie KC auf die durchschneidende Ebene herab und ziehe von dem Puncte C, wo sie die Ebene berührt, in dieser Ebene die geraden Linien CA, CB nach beliebigen Puncten A, B, im Umfange der Durchschnitsfigur. Nun sind die Winkel KCA, KCB rechte Winkel, folglich ist in den eben so genannten Dreyecken $AC^2 = AK^2 - KC^2$ und $BC^2 = KB^2 - KC^2$. Aber KA, KB sind Halbmesser der Kugel, folglich einander gleich und KC ist sich selbst gleich, mithin $AC^2 = BC^2$ und $AC = BC$. Also alle Puncte im Umfange des Durchschnits sind von C gleich entfernt, d. h. sie liegen alle im Umfange eines Kreises.

§. 311. *Zusatz.* Wenn der Durchschnitt durch den Mittelpunct der Kugel geht, so sind die Halbmesser des Durchschnits zugleich Halbmesser der Kugel.

§. 312. *Zusatz.* Je weiter der Durchschnitt vom Mittelpunct der Kugel entfernt, d. h. je grösser KC ist, desto kleiner wird der Kreis, denn der Halbmesser CA ist $= \sqrt{AK^2 - KC^2}$ welcher desto kleiner wird, je grösser KC. Wenn $KC = 0$, das heisst: wenn die Kugel durch den Mittelpunct geschnitten wird, so erhält man den *grössten Kreis*, der aus dem Durchschnitt dieser Kugel entstehen kann. Alle andere sind kleiner.

§. 313. *Zusatz.* Eine gerade Linie kann die Kugelfläche in nicht mehr als zweyen Puncten schneiden.

§. 314. *Zusatz.* Eine senkrechte gerade Linie aus dem Mittelpuncte der Kugel auf die Ebene des Durchschnits geht durch den Mittelpunct des Durchschnits.

Umgekehrt: Eine aus dem Mittelpuncte des Durchschnits auf dessen Ebene senkrechte gerade Linie geht durch den Mittelpunct der Kugel.

Und eine gerade Linie, welche den Mittelpunct der Kugel und den Mittelpunct des Durchschnits verbindet, ist senkrecht auf die Ebene des Durchschnits.

§. 315. *Zusatz.* Grösste Kreise einer Kugel, die sich durchschneiden, halbiren einander, und umgekehrt: Kreise, die einander halbiren, sind grösste Kreise. Der Mittelpunct der Kugel ist der Mittelpunct aller grössten Kreise und man kann aus dem Mittelpuncte der Kugel auf die Ebene eines jeden grössten Kreises eine senkrechte gerade Linie setzen.

§. 316. *Zusatz.* Wenn die senkrechte Linie CK verlängert wird, bis sie die Kugelfläche in D und E schneidet, so sind die Puncte D und E von allen Puncten A, B im Umfange des Durchschnits gleich weit entfernt, denn sowohl DA als DB ist $= \sqrt{AC^2 + CD^2}$.

Und umgekehrt: Wenn zwey Puncte D, E von allen Puncten im Umfange des Durchschnitts gleich entfernt sind, so geht die Linie DE senkrecht durch den Mittelpunkt des Durchschnitts und der Kugel.

Diese Puncte D, E heissen die *Pole* des Kreises ABGF und die gerade Linie DE die *Axe*.

§. 317. *Zusatz.* Kreise wie IL, MN, FG, deren Ebenen parallel sind und die deshalb *Parallelkreise* genannt werden, haben einerley Pole D und E, denn die Pole des Kreises IL liegen in einer auf seine Ebene aus dem Mittelpuncte der Kugel senkrechten Linie. Aber eben diese Linie ist auch auf die mit IL parallele Ebene MN oder FG senkrecht und geht folglich auch durch die Pole dieser Kreise.

§. 318. *Zusatz.* Ein Kreis DAE, der durch die Pole des Kreises FG gehet, stehet auf diesem Kreis senkrecht. (wegen §. 241.)

Und umgekehrt: wenn ein grösster Kreis auf einem andern Kreis der Kugel senkrecht steht, so geht er durch die Pole dieses letztern. Wenn folglich zwey grösste Kreise auf einander senkrecht stehen, so geht jeder durch des andern Pole.

§. 319. *Zusatz.* Die Bogen DA, DB der auf FG senkrechten grössten Kreise sind gleich, denn die Sehnen DA und DB sind gleich, §. 316. mithin auch die Bogen.

Die Bogen OD, PD grösster Kreise, welche zwischen einem grössten Kreise MN und dessen Pole D liegen, sind *Viertel* vom Kreisumfange. (Quadranten)

§. 320. *Zusatz.* Wenn zwey grösste Kreise einander unter einem gewissen Winkel schneiden, so schneiden sich ihre Axen unter eben dem Winkel im Mittelpuncte der Kugel.

§. 321. *Zusatz.* Die Winkel OKP, ACB, welche die Durchschnitte zweyer Parallelkreise mit zwey grössten Kreisen, die durch jene Pole gehen, mit einander machen, sind einander gleich, denn da OKD, ACD einander gleich sind, nemlich jeder $= R$, und überdem OK mit AC in einer Ebene liegt, so sind OK und AC parallel, eben so PK und BC, woraus die Gleichheit jener Winkel nach §. 236. folgt. Jeder ist die Neigung der Kreise DOE, DPE gegen einander.

§. 322. *Zusatz.* Die Tangenten EQ, ER in den Ebenen jener Kreise stehen auch auf DE senkrecht und sind also auch mit CA, CB parallel, daher also der Winkel QER $=$ ACB $=$ OKP ist. Da die Elemente der Bogen bey E in den Richtungen der Tangenten liegen, so kann man sagen, die Kreislinien machen bey E den erwähnten Winkel oder schneiden sich unter dem Winkel QER, daher man einen solchen Winkel, den zwey grösste Kreislinien bey ihrem Durch-

schnittspuncte auf der Kugel machen, einen *sphärischen* Winkel nennt. Er liegt in der Ebene QER, welche die Kugelfläche bey E *berührt*. (in der tangirenden Ebene.)

§. 323. *Lehrsatz. Die Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Kugelfläche und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist.* Fig. 109.

Beweis. Man kann sich so kleine Theile der Kugelfläche denken, dass man sie ohne Fehler als Ebenen ansehen kann. Wenn zum Beyspiel die Linien AB, BD, DA so kleine Bogen sind, dass man sie als gerade Linien ansehen kann, so ist ABD als ein ebnes Dreyeck anzusehen. Man ziehe von den Puncten A, B, D nach dem Mittelpuncte der Kugel die Halbmesser AK, BK, DK, so ist ABDK eine kleine dreyseitige Pyramide, die ABD zur Grundfläche und den Halbmesser zur Höhe hat. So viel nun die Kugelfläche dergleichen Elemente wie ABD enthält, so viel solcher Pyramiden wie ABDK enthält die Kugel. Die ganze Kugel ist folglich der Summe dieser Pyramiden, das heisst: einer einzigen Pyramide, oder welches einerley ist, einem Kegel gleich, der die ganze Kugelfläche zur Grundfläche und den Halbmesser zur Höhe hat.

§. 324. *Lehrsatz. Wenn ACB eine Halbkugel, ADEB ein Cylinder, der den grössten Kreis zur Grundfläche und den Halbmesser zur*

Höhe hat, KDE aber ein Kegel von eben der Grundfläche und Höhe ist und man nun die Figuren, in welcher Höhe man will mit einer Ebene MN durchschneidet, so ist der Cylinderschnitt so gross als der Kugelschnitt und Kegelschnitt zusammen genommen. Fig. 110.

Beweis. Es ist $KI = KA = HM$. Ferner ist $KC:CD = KH:HF$, folglich da $KC = CD$, so ist auch $KH = HF$. Nun ist $KI^2 = HI^2 + KH^2$ und aus §. 138, 196. auch der Kreis, dessen Halbmesser KI ist, so gross als die beyden Kreise deren Halbmesser HI und KH sind. Oder der Kreis, dessen Halbmesser HM ist, so gross als die beyden Kreise, deren Halbmesser HI und HF sind zusammen genommen, das heisst, der Cylinderschnitt ist gleich dem Kugelschnitt und Kegelschnitt zusammen genommen.

§. 325. *Zusatz.* Nun lege man eine Ebene mn unendlich nahe an MN , so können die zwischen diesen Ebenen befindlichen Stücke oder Scheiben des Cylinders, der Kugel und des Kegels als Prismata von der Höhe Hh betrachtet werden, die sich folglich wie ihre Grundflächen verhalten, so dass mithin das Cylinderstück $MNmn$ so gross ist als das Kugelstück $ILil$ und das Kegelstück $FGfg$ zusammen genommen. Da nun dieses in jeder Höhe Statt findet, so folgt, dass die Summe aller Cylinderstücke so gross sey als die Summe aller Kugelstücke und Kegelstücke zusammen genommen, d. h. der Cylinder $ADEB$

so gross als die Halbkugel ACB und der Kegel DKE. Fig. 111.

§. 326. *Zusatz.* Der Cylinder also, der den grössten Kreis zur Grundfläche und den *Durchmesser* zur Höhe hat, ist der *ganzen* Kugel und dem Kegel, der den grössten Kreis zur Grundfläche und den *Durchmesser* zur Höhe hat, zusammen genommen gleich.

§. 327. *Zusatz.* Der Kegel aber ist ein *Drittel* des Cylinders, der mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat, folglich ist die Kugel *zwey Drittel* des Cylinders und doppelt so gross als der Kegel.

§. 328. *Zusatz.* Wenn die Kugel doppelt so gross ist als ein Kegel, der den grössten Kreis zur Grundfläche und den Durchmesser zur Höhe hat, so folgt, dass sie *viermal* so gross als ein Kegel sey, der den grössten Kreis zur Grundfläche und den *Halbmesser* zur Höhe hätte und dass sie *eben so gross* sey als ein Kegel, dessen Grundfläche *viermal* so gross als der grösste Kreis und dessen Höhe der Halbmesser wäre.

§. 329. *Lehrsatz.* Die Kugelfläche ist *viermal* so gross als der grösste Kreis.

Beweis. Die Kugel ist einem Kegel gleich, dessen Höhe dem Halbmesser und dessen Grundfläche der *Kugelfläche* gleich ist. (§. 323.)

Die Kugel ist aber auch einem Kegel gleich, dessen Höhe dem Halbmesser und dessen Grundfläche *viermal so gross als der grösste Kreis ist.* (§. 328.)

Also: Ein Kegel, der den Halbmesser zur Höhe und die *Kugelfläche* zur Grundfläche hat, ist gleich dem Kegel, der den Halbmesser zur Höhe und den *vierfachen grössten Kreis* zur Grundfläche hat.

Wenn nun gleiche Kegel einerley Höhe haben, so müssen auch ihre Grundflächen gleich seyn. Folglich muss die Kugelfläche dem vierfachen grössten Kreise gleich seyn oder die Kugelfläche muss viermal so gross seyn als der grösste Kreis.

§. 330. *Zusatz.* Aus §. 297. folgt, dass die Kugelfläche auch gleich sey der krummen Fläche des Cylinders, der den grössten Kreis zur Grundfläche und den Durchmesser zur Höhe hat.

§. 331. *Anmerkung.* Mit den hier gegebenen Beweisen der obigen Sätze wird es nützlich seyn, andere Beweisarten zu vergleichen. *Kästners Geom.* 64. und 65. Satz. *Karstens Lehrbegr. Geom.* XV. Abschn. §. 390. u. f. *Karstens Auszug Geom.* §. 354. u. f. *Euklides* hat diese Lehre in seinen Elementen nicht. *Archimedes* hat den Satz, dass sich Kegel, Kugel und Cylinder wie 1, 2, 3 verhalten, §. 327. zuerst entdeckt und soll zum Andenken dieser Erfin-

dung diese drey Körper auf sein Grabmal haben setzen lassen.

§. 332. *Lehrsatz. Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen, von gleichen Grundflächen wie ihre Höhen und überhaupt wie Producte aus Grundflächen und Höhen.*

Beweis. Denn es gilt von den Cylindern alles was §. 280. u. f. von Prismen bewiesen ist.

§. 333. *Zusatz.* Ähnliche Cylinder, das heisst: solche, deren Höhen dieselbe Verhältniss wie ihre Durchmesser haben, verhalten sich wie die Cubi ihrer Durchmesser. Denn es sey eines Cylinders $= C$, Grundfläche $= G$, Durchmesser $= D$, Höhe $= H$ und bey einem andern Cylinder $= c$ seyen g , d , h die gleichnamigen Grössen, so ist $C : c = G . H : g . h$. Aber $G : g = D^2 : d^2$ also $G = \frac{g D^2}{d^2}$, mithin $C : c = \frac{g D^2}{d^2} H : g h = g D^2 H : g d^2 h$. Aber wenn die Cylinder ähnlich sind, so ist ferner $D : d = H : h$, also $H = \frac{D h}{d}$. Folglich $C : c = \frac{g D^2 . D h}{d} : g d^2 h = g D^3 h : g d^3 h = D^3 : d^3$.

§. 334. *Zusatz.* Die Sätze 332, 333. gelten auch, wenn man statt Cylinder *Kegel* setzt, weil diese die Drittel von Cylindern sind, die mit ihnen gleiche Grundflächen und Höhen haben.

§. 335. *Lehrsatz.* Kugeln verhalten sich wie die Würfel ihrer Durchmesser.

Beweis. Der Cylinder, welcher den grössten Kreis einer Kugel zur Grundfläche und den Durchmesser zur Höhe hat, ist einem andern Cylinder ähnlich, welcher in Rücksicht einer andern Kugel eben die Beschaffenheit hat. Diese Cylinder verhalten sich also nach §. 333. wie die Cubi der Durchmesser der Kugel. Die Kegel von eben den Grundflächen und Höhen als die Drittel von jenen Cylindern verhalten sich ebenfalls so. Die Kugeln endlich als die Doppelten jener Kegel müssen sich folglich auch wie die Würfel ihrer Durchmesser verhalten.

§. 336. *Zusatz.* Die Flächen der Kugeln aber als die Vierfachen ihrer grössten Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Von den Maassen und der Berechnung ausgedehnter Grössen.

§. 337. *Erklärung.* Das Maass, womit eine Ausdehnung gemessen werden soll, muss von eben der Art seyn, von welcher die ausgedehnte Grösse ist. Eine Linie wird durch eine Linie, eine Fläche durch eine Fläche, ein Körper durch einen Körper gemessen. Man hat also dreyerley Maasse, Längenmaass, Flächenmaass, Körpermaass.

§. 338. *Anmerkung.* Zum *Längenmaasse* hat man insonderheit anfangs Längen der Glieder des menschlichen Körpers als Fusse, Ellen, Handlängen u. dgl. so auch Schritte, Spannen, Klafter u. dgl. gebraucht, wovon die ausführliche Angabe hier zu weitläufig fallen würde. Wir merken nur an, dass man bekanntlich im gemeinen Leben den Fuss in 12 Zolle, den Zoll in 12 Linien (Striche), die Linie oder den Strich in 12 Scrupel eintheilt, welches die *Duodecimaleintheilung* oder das Werkmaass genannt wird. Nach der bey Berechnungen bequemern *Decimaleintheilung* aber hat ein Fuss 10 Zoll, der Zoll 10 Linien, die Linie 10 Scrupel, welches man das geometrische Maass nennt. Eine Ruthe ist eine in verschiedenen Ländern verschiedene Länge von einigen Fussen, von 12 Fuss, 15 Fuss, 20 Fuss. Die Fussmaasse sind ebenfalls nicht in allen Ländern einerley; das französische und rheinländische kömmt am häufigsten vor. Vergleichen von Fussmaassen findet man in verschiedenen Büchern, wovon die vorzüglichsten im Kästner (32. Satz) angezogen sind. *Verwandlungen* eines Maasses in das andere erfordern nur eine leichte Anwendung der Regel de tri oder Kettenregel. Die *Bezeichnungen* von Ruthen, Fusse, Zolle, Linien, Scrupel sind: 0, I, II, III, IV.

§. 339. *Anmerkung.* Um kleine Theile einer Linie anzugeben, dient bequem die Einrich-

tung, Fig. 112. welche man den *verjüngten Maassstab* nennt. Wenn AB und CG, welche etwa die Länge eines Zolles haben, in zehn Theile getheilt und die Theilungspuncte durch Transversallinien zusammengezogen werden, so entstehen dadurch zwey Dreyecke ADC und HBG, welche durch die mit AB und CG parallel gezogenen Linien in ähnliche Dreyecke zertheilt werden. Wenn, wie in der Figur, über CG noch zehn Parallellinien in gleichen Zwischenräumen gezogen sind, so schneidet die Transversale CB nach der Reihe auf diesen Parallellinien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Scrupel ab. Denn es ist zum Beyspiel $CA:CE = AD:EF$, das ist: $10:5 = 1 \text{ Linie}:0,5 \text{ Linie}$ oder 5 Scrupel.

§. 340. *Anmerkung.* Um kleine Theile von Linien anzugeben, dient auch eine sinnreiche Einrichtung, die von ihren Erfindern, einem Spanier, *Nunnez*, und einem Deutschen, *Werner*, den Namen *Nonius* und *Vernier* führt. *) Eine Länge AB, zum Beyspiel, ein Zoll sey in zehn Linien abgetheilt, dergleichen AE eine ist.

*) Doch ist eigentlich die Einrichtung, welche *Nunnez* angegeben hat, (de crepusc. prop. 3.) ganz von der, unter dem Namen *Nonius* oder *Vernier* bekannten, unterschieden. (Vernier. Construction et usage du nouveau Quadrant mathematique. Brüssel 1631.) Man sehe Hrn. Prof. *Scheibels* Auszug aus *Montucla* in den Zusätzen. Die letztere Einrichtung ist daher richtiger *Vernier* oder *Werner* zu nennen.

Eine gleiche Länge $CD = AB$ sey in *neun* gleiche Theile getheilt, dergleichen CF einer ist. Also ist $AE:CF = \frac{1}{10}:\frac{1}{9} = 9:10$ und $CF = \frac{1}{9}AE = 1AE + \frac{1}{9}AE$. Mithin liegen, von A angerechnet, die Theilungspuncte des Vernier nach der Reihe um $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$ u. s. w. Linien *vor* den Theilungspuncten des Zolles. Der Vernier giebt folglich *Neuntel* von Linien bey dieser Einrichtung an. Fände man etwa bequemer, dass er *Zehntel* von Linien angebe, so mache man $CD = 11$ Linien und theile diese in zehn Theile, so ist $AE:CF = \frac{1}{11}:\frac{1}{10} = 10:11$ und $CF = \frac{1}{10}AE = 1AE + \frac{1}{10}AE$. Fig. 113. 114.

§. 341. *Anmerkung.* Zum *Flächenmaass* ist unter allen ebenen Figuren ein Quadrat am bequemsten. Nach der Duodecimaleintheilung hat ein Fuss $12 \cdot 12 = 144$ Quadratzoll u. s. w. nach der Decimaleintheilung aber 100 Quadratzoll u. s. w. Die letztere ist so wie bey dem Längenmaass am bequemsten. Man kann z. B. die Angabe $5^{\circ} 12' 93''$ gleich so schreiben: $51293''$; und umgekehrt: eine so geschriebene Angabe gleich nach Ruthen, Fussen u. s. w. aussprechen, indem man nur für jedes dieser Maasse zwey Ziffern zusammennimmt. Anderer Vortheile bey Berechnungen zu geschweigen.

§. 342. *Anmerkung.* Zum *Körpermaass* ist unter allen von Ebenen begränzten Körpern der Würfel am bequemsten. Ein Cubikfuss (d. h. ein Würfel, der einen Fuss lang, breit und hoch

ist) enthält, nach Duodecimaleintheilung, 1728 Cubikzoll, nach Decimaleintheilung, 1000 Cubikzoll. Nach letzterer Eintheilung kann eine Angabe von Cubikruthen, Fussen, Zollen u. s. w. wie *eine* Zahl geschrieben werden, indem man für jedes dieser Maasse drey Ziffern rechnet, z. B. 25 Cubikruthen, 79 Cubikfuss, 789 Cubikzoll und 4 Cubiklinien kann so geschrieben werden: 25079789004^c".

§. 343. *Anmerkung.* Man bedarf auch eines Maasses für Winkel und dazu hat man den *rechten* Winkel gewählt, den man gewöhnlich in 90 gleiche Winkel theilt, die *Grade* *) genannt werden. Jeden Grad oder Gradwinkel theilt man wieder in 60 *Minuten*, jede Minute in 60 *Secunden*, jede Secunde in 60 *Tertien*. Um einen Punct herum kann man vier rechte Winkel oder $4 \cdot 90 = 360$ Gradwinkel legen. Wenn man also aus einem Puncte einen Kreis beschreibet und den Umfang desselben in 360 gleiche kleine Bogen eintheilt, so können diese *Bogen* bequem zum Maasse der Winkel dienen,

*) Das Wort *Grad* ist wahrscheinlich eine Übersetzung des arabischen Wortes *Dergeh*, (eine Stufe) wofür die Spanier zuerst *Grado* setzten. Das französische *Degré* ist das arabische Wort selbst mit etwas veränderter Aussprache. Die Griechen, z. B. Ptolomäus, brauchten *μοίρα*. Die ältern Lateiner, z. B. Vitruv, Plinius u. a. sagen nicht *gradus*, sondern *partes*. Erst in lateinischen Übersetzungen aus dem Arabischen kommt *gradus* in der Bedeutung, die es noch jetzt hat, vor. (Kästn. geometr. Abhandl. p. 448. f.)

weil gleiche Bogen auch gleiche Winkel am Mittelpuncte voraussetzen. Man nennt daher gewöhnlich diese Bogen oder diese Dreyhundertsechszigstel vom Kreisumfange *Grade*, ihre Sechszigstel *Minuten* u. s. w. Die Zahl 360 ist deswegen bequem, weil sie sich durch mehrere ganze Zahlen ohne Rest theilen lässt. Die Eintheilung in 60 Theile ist aus eben dem Grunde bequem und schon von sehr alten Zeiten her gebräuchlich; ehemals theilte man auch den *ganzen* Kreisumfang in 60 Theile. Um die Eintheilung nicht bey jedem Winkel, den man messen will, besonders vornehmen zu dürfen, welches eine sehr beschwerliche Arbeit seyn würde, braucht man nur ein für alle male einen Kreis oder Halbkreis oder Viertelkreis (Quadranten) oder Sechstelkreis (Sextanten) oder Achtelkreis (Octanten) aus Pappe, Holz, Messing u. dgl. zu verfertigen und auf denselben die Eintheilung in Grade, Minuten..... zu bemerken. Zu Feldmesserarbeiten sind die ganzen oder halben Kreise gewöhnlich, auf denen sich Lineale mit *Dioptern* verschieben lassen, dergleichen Werkzeuge werden *Astrolabia* genannt. Zum Gebrauch auf dem Papiere bey Zeichnungen ist der halbe Kreis (*Transporteur*) gebräuchlich, auch kann man dazu einen *geradlinichten Transporteur* gebrauchen, auf welchen die *Sehnen* der Bogen, die den Winkeln zugehören, aufgetragen sind. Zu astronomischen Beobachtungen sind *Quadranten*, *Sextanten* und *Octanten*

(letztere insonderheit auf Schiffen) im Gebrauch. Man kann bey diesen Instrumenten *Transversallinien* und *Vernier* anbringen wie bey dem Längenmaasse. Die Bezeichnung der Grade, Minuten, Secunden und Tertien ist: $^{\circ}$, $'$, $''$, $'''$.

§. 344. *Aufgabe.* Wenn eines Parallelogramms Grundlinie und Höhe in Längenmaassen gegeben sind, den Flächeninhalt desselben im Flächenmaasse zu berechnen.

Auflösung. Nachdem Grundlinie und Höhe in einerley Längenmaassen ausgedrückt sind, multiplicire man beyde Zahlen mit einander, das Product giebt den Flächeninhalt in Quadratmaass.

Beweis. Das Parallelogramm sey P, seine Grundlinie $= g$, Höhe $= h$, das zum Maasse angenommene Quadrat sey Q. Seine Seite, das heisst, seine Grundlinie und Höhe, jede $= a$, so verhalten sich $P : Q = g \cdot h : aa$. Ist nun das Quadrat als Einheit angenommen $Q = 1$ und also $a = 1$ so ist $P = g \cdot h$.

Exempel. Die Grundlinie eines Parallelogramms sey $= 2''$ Höhe $= 1\frac{1}{2}''$ so ist sein Flächeninhalt $= 3''$.

§. 345. *Zusatz.* Der Flächeninhalt eines Dreyecks von gegebener Grundlinie und Höhe wird folglich berechnet, indem man diese nach einerley Maasse ausdrückt, die Zahlen multipli-

eirt und dann das Product *halbirt* oder auch die halbe Grundlinie mit der ganzen Höhe oder die ganze Grundlinie mit der halben Höhe multiplicirt.

§. 346. *Zusatz.* Den Flächeninhalt mehrerer Dreyecke von gleicher Höhe zu finden, addirt man ihre Grundlinien, multiplicirt die Summe durch die gemeinschaftliche Höhe und halbirt das Product.

§. 347. *Zusatz.* Jede geradlinichte Figur kann durch Diagonalen in Dreyecke zertheilt werden, die auf die angezeigte Art berechnet und addirt den Flächeninhalt der ganzen Figur geben.

§. 348. *Aufgabe.* Den Flächeninhalt eines regulären Polygons zu finden, wenn eine Seite desselben und der Halbmesser des Kreises, in dem es beschrieben ist, gegeben sind.

Auflösung. Zuvörderst muss CD als die Höhe des Dreyecks ACB gesucht werden. Fig. 115. Da sie aus dem Mittelpuncte senkrecht auf die Sehne ist, so halbirt sie letztere, also $AD = \frac{1}{2}AB$, sodann ist CD durch AC und AD zu berechnen, nemlich $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$. Ist dieses gefunden, so ist die Berechnung des Dreyecks ACB und somit des ganzen Polygons wie vorhin. Man kann auch gleich den ganzen

Perimeter mit $\frac{CD}{2}$ multipliciren.

§. 349. *Aufgabe.* Der Halbmesser eines Kreises, die Seite eines in demselben beschriebenen regulären Polygons und die Anzahl der Seiten dieses letztern sind gegeben, man soll die Seite eines in demselben Kreise beschriebenen regulären Polygons finden, welches noch einmal so viel Seiten hat als jenes.

Auflösung. Im Dreyeck ACD hat man $CD = r(CA^q - AD^q)$ wodurch auch $DE = CE - CD$ gegeben ist. Im Dreyeck ADE ist sodann $AE = r(AD^q + DE^q)$. Fig. 115.

§. 350. *Zusatz.* Ist die Seite des Polygons gefunden, so findet sich der ganze Perimeter, wenn man sie mit der Anzahl der Seiten multiplicirt. So lässt sich der Perimeter des Zwölfecks, Vierundzwanzigecks u. s. w. aus dem Halbmesser, der zugleich die Seite des Sechsecks ist, berechnen, wodurch man sich demnach der Peripherie des Kreises so weit man will nähern kann.

§. 351. *Zusatz.* Der Umfang des Kreises ist grösser als der Perimeter eines in demselben und kleiner als der Perimeter eines um denselben beschriebenen Vielecks. Man kann daher sehr genaue Gränzen angeben, zwischen welchen der Umfang des Kreises fallen muss, wenn man die Perimeter zweyer solchen Polygone von sehr vielen Seiten berechnet. Zur Berechnung der Seite des äussern Polygons hat man $CD:DA = CE:EF$. Fig. 115.

§. 352. *Anmerkung.* *Archimedes* fand so die Verhältniss des Durchmessers zum Umkreise $= 7 : 22$. *Peter Metius* fand sie genauer $= 113 : 355$ auf Veranlassung des *Simon van Eyk*. *Hadrian Romanus* berechnete die Peripherie für den Durchmesser $= 1$ bis auf 17 Decimalstellen; *Ludolph van Ceulen* bis auf 35; *Sherwin* bis auf 72; *Machin* bis auf 100; *Lagny* endlich bis auf 127 Decimalstellen. Letztere aber durch ganz andere Verfahrensarten als oben gezeigt sind. Man pflegt die Zahl, welche die Peripherie für den Durchmesser $= 1$ angiebt, mit π zu bezeichnen. Hier ist es genug anzuführen, dass $\pi = 3,141592\dots$ ist, mit dieser Zahl ist die des *Metius* $= \frac{355}{113}$ übereinstimmend. Zu gemeinen Rechnungen pflegt man die Verhältniss $100 : 314$ oder $\pi = 3,14$ zu setzen, welches nicht genauer ist als die archimedische Zahl $\frac{22}{7}$. Alle 128 Ziffern des *Lagny* findet man unter andern in Kästners Analysis des Unendlichen §. 308. (wo aber in die zehnte Stelle eine 5 statt einer 9 zu setzen ist.)

§. 353. *Anmerkung.* Aus Obigem sieht man, dass die Verhältniss des Durchmessers zum Umfange weit genauer berechnet ist als man sie jemals gebraucht, dennoch haben sich Manche die undankbare Mühe gegeben, die Verhältniss völlig genau zu finden. Einige Versuche dieser Art sind so unglücklich gerathen, dass die Angaben schon in den ersten Decimalstellen der

oben angegebenen Zahl abweichen. Ob die Verhältniss irrational sey, ist nicht ausgemacht. Mehreres über diese Materie kann nachgelesen werden in Kästners Geometrie 43. und 44. Satz in den Anmerkungen.

§. 354. *Zusatz.* Durch die Verhältniss §. 352. lässt sich nun der Umfang jedes Kreises von gegebenem Durchmesser finden, indem man den Durchmesser mit π multiplicirt, wovon man so viel Stellen nimmt als man für nöthig findet. Und umgekehrt, findet man den Durchmesser aus dem Umfange, wenn man diesen mit π dividirt oder mit $\frac{1}{\pi} = 0,318309$ multiplicirt.

§. 355. *Zusatz.* Ist der Umkreis gefunden, so wird der Flächeninhalt des Kreises daraus leicht berechnet, indem man den Umkreis mit dem Halbmesser multiplicirt und das Product halbt. §. 186. Es sey ein Kreis $= c$, sein Halbmesser $= r$, sein Umfang $= p$, so ist $c = \frac{pr}{2}$. Aber es war nach §. 354. $p = 2r\pi$, also $c = \frac{2r\pi r}{2} = \pi r^2$. Also findet man den Inhalt des Kreises, wenn man das Quadrat seines Halbmessers mit π multiplicirt.

§. 356. *Zusatz.* Da $c = \pi r^2$, so ist $r^2 : c = 1 : \pi$. Der Durchmesser sey $d = 2r$, also d^2

$= 4r^2$, mithin $d^2 : c = 4 : \pi$ oder $= 1 : \frac{1}{4}\pi = 1 : 0,785398\dots$ und $c = \frac{1}{4}\pi d^2$.

§. 357. *Zusatz.* Um einen Ausschnitt eines Kreises zu berechnen, muss man den Bogen, der ihn begränzt, mit den Halbmesser multipliciren und das Product halbiren. Ist nicht der Bogen, sondern der Winkel am Mittelpuncte gegeben, so wird der Bogen zuerst daraus berechnet. Es sey der Winkel $= \alpha$, der gesuchte Bogen $= b$, so ist $360 : \alpha = p : b$.

§. 358. *Zusatz.* Der Inhalt des Abschnitts AEBDA wird gefunden, indem man erst den Ausschnitt berechnet und dann das Dreyeck ACB davon abzieht, welches letztere durch AB und $CD = r(r^2 - \frac{1}{4}AB^2)$ gefunden wird. Fig. 115.

§. 359. *Zusatz.* Der Ring zwischen zwey concentrischen Umkreisen, deren Halbmesser R und r seyn mögen, ist $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$.

§. 360. *Zusatz.* Um den Halbmesser $\mathfrak{R}$ eines Kreises zu finden, der zweyen gegebenen Kreisen zusammen genommen gleich sey, deren Halbmesser R und r sind, hat man, wie aus §. 196. folgt, $\mathfrak{R} = r(R^2 + r^2)$. Um den Halbmesser eines Kreises zu finden, der dem Unterschiede zweyer gegebenen Kreise gleich sey, $\mathfrak{R} = r(R^2 - r^2)$.

§. 361. Zusatz. Aus 356. hat man $\frac{c}{\pi} = r^2$

und $r \frac{c}{\pi} = r$. Wenn man nun irgend eine Figur hat, deren Flächeninhalt $= c$ ist, und einen Kreis sucht, der dieser Figur gleich sey, so findet man durch obigen Ausdruck den Halbmesser dieses Kreises.

§. 362. Zusatz. Um die sichelförmige Figur (*Lunula Hippocratis*) AFBEA zu berechnen, welche von den Bogen eines aus C beschriebenen Quadranten und eines über dessen Sehne beschriebenen Halbkreiss begränzt wird, braucht man bloss das rechtwinklichte Dreyeck ABC zu berechnen. Dies erhellet so: Ein mit AB beschriebener Kreis sey $= C$; einer mit $DA = \frac{1}{2}AB$ beschriebener sey $= c$, folglich $c = \frac{1}{4}C$. Die mit $CA = CB$ beschriebenen jeder $= k$ so ist $C = k + k = 2k$; und $k = \frac{1}{2}C = 2c$ oder $\frac{1}{4}k = \frac{1}{2}c$ das heist der Quadrant mit CA $=$ dem Halbkreiss mit DA; oder CAEBC $=$ ACBDA. Von beyden den Abschnitt AEBDA weggenommen ist $\triangle ABC =$ der Lunula AFBEA.

§. 363. Aufgabe. Wenn Grundfläche und Höhe eines Prismas gegeben sind, den körperlichen Inhalt desselben in Cubikmaasse zu finden.

Auflösung. Man multiplicire Grundfläche und Höhe, nach einerley Maass angedrückt miteinander, das Product giebt den körperlichen Inhalt in Cubikmaasse.

Beweis. Das Prisma sey $= P$ seine Grundfläche $= g$ Höhe $= h$ der zum Maasse angenommene Cubus $= C$ seine Seite $= a$ so ist nach (§. 290.) $P : C = gh : a^2 a$ und $P = \frac{C \cdot gh}{a^2 a}$ oder wenn $C = 1$ folglich auch $a = 1$ angenommen wird $P = gh$.

§. 364. *Zusatz.* Der körperliche Inhalt einer Pyramide von bekannter Grundfläche und Höhe wird gefunden, indem man Grundfläche und Höhe miteinander multiplicirt, und das Product mit 3 dividirt; oder indem man die ganze Grundfläche mit dem Drittel der Höhe, oder auch das Drittel der Grundfläche mit der ganzen Höhe multiplicirt. (§. 277.)

§. 365. *Zusatz.* Dass der körperliche Inhalt von Cylinder und Kegel eben so gefunden wird, wie von Prisma und Pyramide, ist aus (§. 292. 305.) klar. Die Grundfläche wird hier, falls nur *Durchmesser* und Höhe gegeben sind, nach 355. berechnet.

§. 366. *Zusatz.* Ein cylindrisch ausgehöhlter Cylinder wird berechnet, indem man erst

den ganzen, und sodann den fehlenden Cylinder sucht, der in die Höhlung passte.

§. 367. *Zusatz.* Um einen abgekürzten senkrechten Kegel zu berechnen, dessen beyde einander parallele Kreisflächen und Höhe FG gegeben sind, hat man zuvörderst die Höhe des ganzen zu suchen durch die Proportion $CH : HE = CF : FA$, wodurch dann zugleich GA gefunden ist, mithin der ganze Kegel und der fehlende berechnet werden können. Letzterer vom erstern abgezogen, läst den abgekürzten Kegel übrig. Fig. 117.

§. 368. *Zusatz.* Die krumme Fläche eines senkrechten Cylinders wird wie ein Rechteck, die eines senkrechten Kegels wie ein Dreyeck berechnet. (§. 295. 307.

§. 469. *Aufgabe.* Wenn der Durchmesser einer Kugel gegeben ist, ihren körperlichen Inhalt zu finden.

Auflösung. Der Durchmesser sey $= d$ so ist der größte Kreis der Kugel $= \frac{1}{4}\pi d^2$ (§. 356.) der Cylinder, der den grössten Kreis zur Grundfläche, und den Durchmesser zur Höhe hätte, wäre $= \frac{1}{4}\pi d^3$. Die Kugel ist $\frac{2}{3}$ desselben, folglich $= \frac{1}{6}\pi d^3$. Also um den Inhalt der Kugel zu finden, multiplicire man den Cubus des Durchmessers mit $\frac{1}{6}\pi$, das ist, mit 0,523568 ...

§. 370. *Zusatz.* Die Fläche einer Kugel vom gegebenen Durchmesser, ist viermal so gross, als der grösste Kreis $= \pi d^2$.

§. 371. *Zusatz.* Aus dem körperlichen Inhalte der Kugel, der $= k$ seyn mag, den Durchmesser zu finden, hat man $k = \frac{1}{6}\pi d^3$ also $6k = \pi d^3$ und $\frac{6k}{\pi} = d^3$, folglich $d = \sqrt[3]{\frac{6k}{\pi}}$

Ferner da $6k = \pi d^3$ und die Oberfläche $f = \pi d^2$ ist, so ist $\frac{6k}{f} = d$.

Grundbegriffe der ebenen Trigonometrie.

§. 372. *Erklärung.* Die ebne Trigonometrie lehrt aus drey Stücken eines Dreyecks, worunter aber wenigstens eine Seite seyn muss, die übrigen Stücke berechnen.

§. 373. *Erklärung.* Das *Complement* oder die Ergänzung eines Winkels oder Bogens ist derjenige Winkel oder Bogen, der mit jenem 90° ausmacht. Das Complement eines stumpfen Winkels ist daher als negativ anzusehen.

§. 374. *Erklärung.* Aus der Spitze eines Winkels C, Fig. 118. sey mit einem beliebigen Halbmesser ein Kreis beschrieben. Die Puncte, wo die Schenkel des Winkels den Umkreis schnei-

den wie A und S, wollen wir die *Endpunkte* der Schenkel nennen.

Ein Schenkel CA kann der *unbewegliche*, der andere wie CS der *bewegliche* Schenkel heißen. Des Complementwinkels unbeweglicher Schenkel ist CB. Den beweglichen aber hat er mit dem ersten Winkel gemein.

§. 375. *Erklärung.* Zum Behuf der Berechnungen braucht man gewisse gerade Linien in und am Kreise, die deshalb die *trigonometrischen Hülfslinien* genannt werden. Sie sind folgende:

Sinus ist die gerade Linie vom Endpunkte des beweglichen Schenkels senkrecht auf den unbeweglichen, oder dessen Verlängerung, wie SD.

Sinus versus (Quersinus) ist das Stück des unbeweglichen Schenkels von seinem Endpunkte an, bis an den Sinus, wie AD.

Tangente ist eine aus dem Endpunkte des unbeweglichen Schenkels senkrecht auf demselben aufgerichtete Linie bis an die Verlängerung des beweglichen Schenkels, wie AT.

Secante ist der bewegliche Schenkel, verlängert bis an die Tangente, wie CT.

Cosinus, *Cosinus versus*, *Cotangente*, *Cosecante* sind nichts anders als Sinus, Sinus ver-

sus, Tangente, Secante des Complementwinkels.

§. 376. *Zusatz.* Wenn ein Winkel von 0 bis 90° wächst, so wächst sein Sinus von 0 bis zur Grösse des Halbmessers; sein Sinus versus ebenfalls seine Tangente von 0 bis ins Unendliche; seine Secante von der Grösse des Halbmessers bis ins Unendliche.

Hingegen sein Cosinus nimmt ab von der Grösse des Halbmessers bis 0. Sein Cosinus versus ebenfalls; seine Cotangente vom Unendlichen bis 0; seine Cosecante vom Unendlichen bis zur Grösse des Halbmessers.

§. 377. *Zusatz.* Wenn der Winkel ferner von 90° bis 180° wächst, so verhält es sich fast umgekehrt. Der Sinus nimmt ab von der Grösse des Halbmessers bis 0. Der Sinus versus aber wächst von der Grösse des Halbmessers bis zur Grösse des Durchmessers. Die Tangente nimmt ab vom Unendlichen bis 0, und ist in Rücksicht der Lage verneint. Die Secante nimmt ab vom Unendlichen bis zur Grösse des Halbmessers.

Der Cosinus aber wächst von 0 bis zur Grösse des Halbmessers, ist aber in Ansehung seiner Lage negativ. Der Cosinus versus wächst von 0 bis zur Grösse des Halbmessers. Die Cotangente wächst von 0 bis ins Unendliche, ist

aber negativ. Die Cosecante wächst von der Grösse des Halbmessers bis ins Unendliche.

§. 378. *Zusatz.* Ausführlichere Erläuterungen, die hier zu viel Raum wegnehmen würden, müssen bey dem Unterricht mündlich beygefügt werden, und wir setzen deshalb diese Betrachtungen auch nicht für solche Winkel fort, wo der bewegliche Schenkel aus dem zweyten Quadranten in den dritten und vierten übergeht. In der That kommen auch solche convexe Winkel oder Bogen, die grösser als 180° sind, nicht nothwendig vor. Indessen wollen wir hier mit Rücksicht auf die 118te Figur folgende kurze Uebersicht der trigonometrischen Hülfslinien durch alle vier Quadranten beyfügen:

Quadrant	I	II	III	IV
Winkel	ACS	ACH	ACL	ACO
Sinus	SD +	HI +	LI —	OD —
Sinus versus	AD +	AI +	AI +	AD +
Tangente	AT +	AN —	AT +	AN —
Secante	CT +	CN —	CT —	CN +
Cosinus	SE +	HE —	LM —	OM +
Cosinus versus	BE +	BE +	BM +	BM +
Cotangente	BF +	BG —	BF +	BG —
Cosecante	CF +	CG +	CF —	CG —

§. 379. *Anmerkung.* Von den Zeichen der Secanten insonderheit ist nachzusehen Kästners Aufsatz über das Bejahte und Verneinte

bey Secanten, in seinen geometrischee Abhandlungen S. 459. u. f.

§. 380. *Zusatz.* Zwey Winkel oder Bogen, die zusammen genommen 180° ausmachen, haben (den einzigen sinus versus ausgenommen) einerley trigonometrische Hülfslinien. Oder noch allgemeiner auch für Bogen über 180° kann man dies so ausdrücken:

Ein spitziger Winkel $= \alpha$ ein stumpfer $= 180^\circ - \alpha$, ein convexer $= 180^\circ + \alpha$, und ein convexer $= 360^\circ - \alpha$ haben einerley Sinus, Tangente, Secante u. s. w.

§. 381. *Zusatz.* In Kreisen von ungleichen Halbmessern verhalten sich die Sinus u. s. w. bey gleichen Winkeln wie die Halbmesser der Kreise. Denn es sey Fig. 119. $acf = ACS$, so sind die Dreyecke dch und DCS ähnlich, und es ist $sd : cs = SD : CS$ oder $SD : sd = CS : cs$.

Eben so erhellet es für die Tangenten u. s. w.

§. 382. *Zusatz.* Der Sinus, der einem Winkel von 90° zugehört, ist dem Halbmesser gleich; und dies ist der gröste Sinus der Statt finden kann. Alle übrigen Sinus sind kleiner, und man kann sie so in Zahlen ausdrücken, dass man angiebt, ein wie grosses Stück des Halbmessers ein solcher Sinus sey. Daher nennt man den Halbmesser oder den Sinus von 90°

den ganzen Sinus. (*Sinus totus*) Die absolute Grösse des Halbmessers ist nun begreiflich hiebey ganz gleichgültig, denn wie gross er auch sey, so haben die Sinus u. s. w. von einerley Winkel eben dieselbe Verhältniss zu demselben.

§. 383. *Zusatz.* Um die trigonometrischen Linien in Theilen des Halbmessers auszudrücken, bedient man sich bequem der Decimalbrüche, wenn man den Halbmesser $= 1$ setzt. Obgleich nicht alle Linien sich völlig genau angeben lassen, so kann man sich doch ihrem wahren Werthe so weit man will, nähern.

§. 384. *Anmerkung.* Ob gleich wir hier nicht ausführlich die Berechnung der trigonometrischen Linien in Theilen des Halbmessers lehren können, so wird doch folgendes dazu dienen, die Möglichkeit solcher Berechnungen einzusehen.

*Berechnung der trigonometrischen Hülfs-
linien.*

§. 385. *Aufgabe.* Wenn der Sinus eines Bogens gegeben ist, die übrigen trigonometrischen Hülfslinien zu finden.

Auflösung. 1) Es sey gegeben SD als der Sinus des Winkels ACS den wir $= a$ nennen wollen, so ergiebt sich aus bekannten geometrischen Gründen

2) Der *Cosinus* $CD = r(CS^2 - SD^2)$
oder $\cos. \alpha = r(r^2 - \sin. \alpha^2)$.

3) Der *Sinus versus* $AD = CA - CD$ oder
 $\sin. \text{vers. } \alpha = r - \cos. \alpha$.

4) Der *Cosinus versus* $BE = CB - CE$
 $= CB - DS$ oder $\cos. \text{vers. } \alpha = r - \sin. \alpha$.

5) Die *Tangente* AT findet sich durch die
Proportion $CD : DS = CA : AT$ oder $\cos. \alpha :$
 $\sin. \alpha = r : \text{tang. } \alpha$, also $\text{tang. } \alpha = \frac{r \sin. \alpha}{\cos. \alpha}$

6) Die *Cotangente* BF durch die Propor-
tion $CE : ES = CB : BF$ oder $\sin. \alpha : \cos. \alpha$
 $= r : \cot. \alpha$. Also $\cot. \alpha = \frac{r \cos. \alpha}{\sin. \alpha}$ Oder
auch wegen Aehnlichkeit der Dreyecke ACT
und BFC durch folgende Proportion $AT : AC$
 $= BC : BF$ d. h. $\text{tang. } \alpha : r = r : \cot. \alpha$. Also
 $\cot. \alpha = \frac{r^2}{\text{tang. } \alpha}$

7) Die *Secante* $CT = r(CA^2 + AT^2)$
oder $\sec. \alpha = r(r^2 + \text{tang. } \alpha^2)$.

8) Die *Cosecante* $CF = r(CB^2 + BF^2)$
oder $\text{cosec. } \alpha = r(r^2 + \cot. \alpha^2)$.

§. 386. *Zusatz.* Aus dem Ausdruck für die
Cotangente $\cot. \alpha = \frac{r^2}{\text{tang. } \alpha}$ folgt, dass sich

die Cotangenten zweyer Bogen umgekehrt wie die Tangenten dieser Bogen verhalten.

§. 387. *Zusatz.* Der Sinus eines Bogens ist die Hälfte der Sehne des doppelten Bogens. In Fig. 118. ist $SD = \frac{1}{2} SO$ wenn SA und SO gleich sind. Hiedurch weiss man den Sinus von 30° . Denn da die Sehne von 60° dem Halbmesser gleich ist, so ist $\text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2} r$.

Auch erfährt man so den sinus von 45° denn die Sehne von 90° ist $= r\sqrt{2}$ also $\text{sin. } 45^\circ = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ oder wenn $r = 1$ gesetzt wird $\text{sin. } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071068$.

§. 388. *Anmerkung.* Nach Godins Meynung soll das Wort Sinus eben daher seinen Ursprung haben, dass es die Hälfte der Sehne bedeutet. Man schrieb nemlich anfangs *semis inscriptae*, woraus durch Abkürzung *s. in.* gemacht worden. (Montucla hist. d. math. I. p. 358.)

§. 389. *Zusatz.* Da die Geometrie lehrt aus der Sehne eines Bogens, die Sehne eines halb so grossen Bogens zu finden, so ist man im Stande, auch die Sinus, und mithin alle trigonometrische Hülfslinien solcher Bogen zu berechnen, die aus fortgesetzter Halbierung der Bogen von 60 Grad und 90 Grad entstehen.

Bogen, welche durch Halbierung von 60° entstehen, sind folgende 30° , 15° , $7^\circ 30'$, $3^\circ 45'$, $1^\circ 52' 30''$, $56' 15''$, $28' 7\frac{1}{2}''$, $14' 3\frac{3}{4}''$, $7' 1\frac{7}{8}''$.

§ 390. *Zusatz.* Für die beyden letzten Bogen findet man folgende Sinus und Tangenten

$$\sin. 14' 3\frac{3}{4}'' = 0,0040906$$

$$\text{tang. } 14' 3\frac{3}{4}'' = 0,00409065$$

$$\sin. 7' 1\frac{7}{8}'' = 0,0020453$$

$$\text{tang. } 7' 1\frac{7}{8}'' = 0,00204532$$

woraus man also sieht, dass für so kleine Bogen, die nemlich kleiner als $14' 3\frac{3}{4}''$ sind, die Sinus von den Tangenten in den ersten sieben Decimalstellen nicht unterschieden sind. Da nun die Bogen selbst zwischen Sinus und Tangenten fallen, so können diese Bogen selbst von ihren Sinus und Tangenten auch in den ersten sieben Decimalstellen nicht unterschieden seyn.

§. 391. *Zusatz.* Es verhalten sich also so kleine Bogen ohne merklichen Fehler wie ihre Sinusse.

Hiedurch ist man im Stande, auch die Trigonometrischen Linien solcher Bogen zu bestimmen, die nicht aus Halbierung von 60° und 90° entstehen.

Zum Beyspiel, um den Sinus von 7 Minuten zu finden, setzt man die Proportion an

$$7' 1\frac{7}{8}'' : 7' = \sin. 7' 1\frac{7}{8}'' : \sin. 7'$$

und man findet $\sin. 7' = 0,0020262$

so findet man auch $\sin. 1' = 0,0002909$

§. 392. Aufgabe zweyer Bogen Sinus und Cosinus sind gegeben, man sucht den Sinus der Summe beyder Bogen.

Auflösung. Es sey Fig. 120. $AB = \alpha$, $\sin. \alpha$, $EC = \cos. \alpha$, $BD = \beta$, $DF = \sin. \beta$, $FC = \cos. \beta$. Man sucht $DG = \sin. (\alpha + \beta)$

Man ziehe FI senkrecht auf CA, und FK senkrecht auf DG, so ist $DG = DK + KG = DK + FI$. Diese beyden finden sich nun folgendermassen:

Die Dreyecke DFK und BEC sind ähnlich, also $CB : CE = DF : DK$ oder $r : \cos. \alpha = \sin. \beta : DK$ also $DK = \frac{\sin. \beta \cos. \alpha}{r}$

Die Dreyecke CFI und BEC sind auch ähnlich, also $CB : BE = CF : FI$ oder $r : \sin. \alpha = \cos. \beta : FI$, also $FI = \frac{\sin. \alpha \cos. \beta}{r}$

Folglich $\sin. (\alpha + \beta) = \frac{\sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta}{r}$ oder wenn

man Kürze halber $r = 1$ setzt, $\sin. (\alpha + \beta) = \sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta$.

§. 393. Zusatz. Der Sinus des Unterschiedes wird auf ähnliche Art gefunden. Es sey $AD = \gamma$, $DG = \sin. \gamma$, $CG = \cos. \gamma$. Man sucht $DF = \sin. (\gamma - \alpha)$.

Man ziehe DL senkrecht auf DF und GL senkrecht auf CB, so ist $DF = LM = LG = MG$.

$$\text{Es ist } BC : CE = DG : GL \text{ oder } r : \cos. \alpha = \sin. \gamma : GL \text{ also } GL = \frac{\cos. \alpha \cdot \sin. \gamma}{r}$$

$$\text{Ferner ist } BC : BE = GC : GM \text{ oder } r : \sin. \alpha = \cos. \gamma : GM \text{ also } GM = \frac{\sin. \alpha \cdot \cos. \gamma}{r}$$

$$\begin{aligned} &\text{Folglich } \sin. (\gamma - \alpha) \\ &= \frac{\sin. \gamma \cdot \cos. \alpha - \cos. \gamma \cdot \sin. \alpha}{r} \text{ oder wenn } r \\ &= 1, \sin. (\gamma - \alpha) = \sin. \gamma \cdot \cos. \alpha - \cos. \gamma \cdot \sin. \alpha. \end{aligned}$$

§. 394. *Zusatz.* So findet man auch für den *Cosinus der Summe* folgendes: Es wird gesucht $CG = CI - GI = CI - FK$.

$$\begin{aligned} &\text{Die Dreyecke } BCE \text{ und } FCI \text{ sind ähnlich,} \\ &\text{also } BC : CE = FC : CI \text{ oder } r : \cos. \alpha = \cos. \beta : CI \text{ also } CI = \frac{\cos. \alpha \cdot \cos. \beta}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Die Dreyecke } BCE \text{ und } DFK \text{ sind ähnlich,} \\ &\text{also } BC : BE = DF : FK \text{ oder } r : \sin. \alpha = \sin. \beta : FK \text{ also } FK = \frac{\sin. \alpha \cdot \sin. \beta}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{Folglich, } \cos. (\alpha + \beta) \\ &= \frac{\cos. \alpha \cdot \cos. \beta - \sin. \alpha \cdot \sin. \beta}{r} \text{ oder für } r \\ &= 1, \cos. (\alpha + \beta) = \cos. \alpha \cos. \beta - \sin. \alpha \sin. \beta. \end{aligned}$$

§. 395. *Zusatz.* Den *Cosinus* des Unterschiedes zu finden, ist $CF = \cos. (\gamma - \alpha) = CM + MF = CM + LD$.

In den Dreyecken EBC und CGM ist $BC : CE = CG : CM$ oder $r \cos. \alpha = \cos. \gamma : CM$
also $CM = \frac{\cos. \alpha \cdot \cos. \gamma}{r}$

In den Dreyecken EBC und DLG ist $BC : BE = DG : DL$ oder $r : \sin. \alpha = \sin. \gamma : DL$.
also $DL = \frac{\sin. \alpha \cdot \sin. \gamma}{r}$

$$\begin{aligned} & \text{Folglich } \cos. (\gamma - \alpha) \\ &= \frac{\cos. \gamma \cdot \cos. \alpha + \sin. \gamma \cdot \sin. \alpha}{r} \text{ oder für } r \\ &= 1, \cos. (\gamma - \alpha) = \cos. \gamma \cdot \cos. \alpha + \sin. \gamma \cdot \sin. \alpha. \end{aligned}$$

§. 396. *Zusatz.* Die *Tangente* der Summe zweyer Bogen zu finden, hat man für $r = r$

$$\begin{aligned} & \text{folgendes: } \tan. (\alpha + \beta) = \frac{\sin. (\alpha + \beta)}{\cos. (\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin. \alpha \cdot \cos. \beta + \cos. \alpha \cdot \sin. \beta}{\cos. \alpha \cdot \cos. \beta - \sin. \alpha \cdot \sin. \beta} \text{ so hätte man} \end{aligned}$$

die Tangente der Summe durch Sinus und Cosinus der einzelnen Bogen ausgedrückt. Man kann sie aber auch durch die Tangenten der einzelnen Bogen ausdrücken. Man dividire nemlich Zähler und Nenner des obigen Ausdrucks mit $\cos. \alpha \cdot \cos. \beta$ so ist

$$\text{der Zähler} = \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} + \frac{\sin. \beta}{\cos. \beta} = \text{tang. } \alpha + \text{tang. } \beta$$

$$\text{der Nenner} = 1 - \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} \cdot \frac{\sin. \beta}{\cos. \beta} = 1 - \text{tang. } \alpha \cdot \text{tang. } \beta.$$

$$\text{Also tang. } (\alpha + \beta) = \frac{\text{tang. } \alpha + \text{tang. } \beta}{1 - \text{tang. } \alpha \cdot \text{tang. } \beta}$$

§. 397. Zusatz. Für die Tangente des Unterschiedes hat man (wiederum $r = 1$ gesetzt)

$$\text{tang. } (\gamma - \alpha) = \frac{\sin. (\gamma - \alpha)}{\cos. (\gamma - \alpha)} = \frac{\sin. \gamma \cdot \cos. \alpha - \cos. \gamma \cdot \sin. \alpha}{\cos. \gamma \cos. \alpha + \sin. \gamma \cdot \sin. \alpha}$$

So hätte man

sie durch sinus und cosinus der einzelnen Bogen ausgedrückt; man kann sie aber auch durch die Tangenten der einzelnen Bogen ausdrücken. Wenn man nämlich Zähler und Nenner mit $\cos. \gamma \cdot \cos. \alpha$ dividirt, so wird

$$\text{der Zähler} = \frac{\sin. \gamma}{\cos. \gamma} - \frac{\sin. \alpha}{\cos. \alpha} = \text{tang. } \gamma - \text{tang. } \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{der Nenner} &= 1 + \frac{\sin. \gamma \cdot \sin. \alpha}{\cos. \gamma \cdot \cos. \alpha} = 1 \\ &+ \text{tang. } \gamma \cdot \text{tang. } \alpha. \\ \text{Also tang. } (\gamma - \alpha) &= \frac{\text{tang. } \gamma - \text{tang. } \alpha}{1 + \text{tang. } \gamma \cdot \text{tang. } \alpha} \end{aligned}$$

§. 398. *Zusatz.* Der *Sinus des doppelten Bogens* ergibt sich aus §. 392. Wenn man daselbst $\beta = \alpha$ setzt, so findet sich $\sin. 2\alpha = 2 \cdot \sin. \alpha \cos. \alpha$.

Der *Cosinus des doppelten Bogens* aus §. 394, $\cos. 2\alpha = \cos. \alpha^2 - \sin. \alpha^2$, oder weil hier $\sin. \alpha^2 = 1 - \cos. \alpha^2$ ist, (da nemlich $r = 1$), so kann man auch sagen $\cos. 2\alpha = 2 \cos. \alpha^2 - 1$. Man kann noch einen andern Ausdruck wählen, denn da hier $\cos. \alpha^2 = 1 - \sin. \alpha^2$, so kann man auch sagen $\cos. 2\alpha = 1 - 2 \sin. \alpha^2$.

Die *Tangente des doppelten Bogens* aus §. 396, $\text{tang. } 2\alpha = \frac{2 \text{ tang. } \alpha}{1 - \text{tang. } \alpha^2}$

§. 399. *Zusatz.* Der *Sinus des halben Bogens* findet sich aus §. 398. Da hatte man $\cos. 2\alpha = 1 - 2 \sin. \alpha^2$, also $\sin. \alpha^2 = \frac{1 - \cos. 2\alpha}{2}$

und $\sin. \alpha = r \frac{(1 - \cos. 2\alpha)}{2}$. So wie nun hier der Sinus des einfachen Bogens aus dem

Cosinus des doppelten bestimmt wird, so muss natürlich auch der Sinus des halben Bogens aus dem Cosinus des einfachen bestimmt werden. Man braucht nur α statt 2α und $\frac{1}{2}\alpha$ statt α zu setzen. Also erhält man $\sin. \frac{1}{2}\alpha = r \frac{(1 - \cos. \alpha)}{2}$

Der *Cosinus des halben Bogens* auch aus §. 398. Dort war $\cos. 2\alpha = 2 \cos. \alpha^2 - 1$.

Also $\cos. \alpha^2 = \frac{1 + \cos. 2\alpha}{2}$ und $\cos. \alpha$

$= r \frac{1 + \cos. 2\alpha}{2}$ Eben so ist folglich auch

$\cos. \frac{1}{2}\alpha = r \frac{1 + \cos. \alpha}{2}$

Die *Tangente des halben Bogens* wird durch die eben gefundenen Ausdrücke ebenfalls be-

stimmt. Denn es ist $\tan. \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin. \frac{1}{2}\alpha}{\cos. \frac{1}{2}\alpha}$

$= r \frac{1 - \cos. \alpha}{1 + \cos. \alpha}$

§. 400. *Zusatz.* Es kann zuweilen bequem seyn, Summe und Unterschiede des Sinus und Cosinus durch Producte auszudrücken, weil die Logarithmen sich dabey mit mehr Vortheil gebrauchen lassen. Hierzu dient folgendes: es war oben:

$$\begin{aligned}\sin. (\alpha + \beta) &= \sin. \alpha \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta \\ \sin. (\alpha - \beta) &= \sin. \alpha \cos. \beta - \cos. \alpha \sin. \beta \quad \S. 393.\end{aligned}$$

$$\text{Summe} = 2 \sin. \alpha \cos. \beta$$

$$\text{Unterschied} = 2 \cos. \alpha \cos. \beta$$

Ferner war

$$\begin{aligned}\cos. (\alpha + \beta) &= \cos. \alpha \cos. \beta - \sin. \alpha \sin. \beta \\ \cos. (\alpha - \beta) &= \cos. \alpha \cos. \beta + \sin. \alpha \sin. \beta \quad \S. 395.\end{aligned}$$

$$\text{Summe} = 2 \cos. \alpha \cos. \beta$$

$$\text{Unterschied} = 2 \sin. \alpha \sin. \beta$$

Wenn wir $\alpha + \beta = \sigma$ und $\alpha - \beta = \delta$ nennen, so ist (Arithm. §. 100.) $\alpha = \frac{1}{2}(\sigma + \delta)$ und $\beta = \frac{1}{2}(\sigma - \delta)$.

Sind also zwey Bogen σ und δ gegeben, so lassen sich Summe und Unterschied ihrer Sinus und Cosinus folgendermaassen durch Producte ausdrücken.

$$\sin. \sigma + \sin. \delta = 2 \sin. \frac{1}{2}(\sigma + \delta) \cdot \cos. \frac{1}{2}(\sigma - \delta)$$

$$\sin. \sigma - \sin. \delta = 2 \cos. \frac{1}{2}(\sigma + \delta) \cdot \sin. \frac{1}{2}(\sigma - \delta)$$

$$\cos. \sigma + \cos. \delta = 2 \cos. \frac{1}{2}(\sigma + \delta) \cdot \cos. \frac{1}{2}(\sigma - \delta)$$

$$\cos. \delta - \cos. \sigma = 2 \sin. \frac{1}{2}(\sigma + \delta) \cdot \sin. \frac{1}{2}(\sigma - \delta)$$

§. 401. *Anmerkung.* Trigonometrische Tafeln sind schon in alten Zeiten gebraucht worden.

Hipparch bediente sich schon derselben.

Ptolomäus ebenfalls, seine Tafeln enthalten nicht Sinus, sondern Sehnen, und zwar für ei-

nen Halbmesser, der in 60 Theile getheilt ist, welche Eintheilung von jeher sehr gebräuchlich war.

Die *Araber* sollen statt der Sehnen die halben Sehnen oder Sinus in die Trigonometrie eingeführt haben, aber man weiss nicht genau wann und von wem sie zuerst gebraucht sind.

Die *Deutschen* haben sich in neuern Zeiten durch den ausdauernden Fleiss, womit sie Tafeln berechnet haben, vorzüglich um die Trigonometrie, mithin um die ganze Mathematik verdient gemacht.

Purbach, geb. 1423 gest. 1462, berechnete Sinus für den Halbmesser $= 600000$ durch einzelne Minuten.

Apian, geb. 1501, gest. 1552, für den Halbmesser $= 100000$.

Rhäticus, geb. 1514, gest. 1576, verfertigte den grossen Canon für den Halbmesser 10 000 000 000, welcher einen Theil des unter dem Namen *Opus palatinum* berühmten Werks ist.

Otho, ein Mathematiker in Diensten des Churfürsten Friedrichs des Vierten von der Pfalz, vollendete nach Rhäticus Tode dessen Tafeln und gab sie unter dem Titel *Opus palatinum* heraus.

Pitiscus, geb. 1561, gest. 1613, verbesserte und erweiterte auf Befehl des genannten Churfürsten das *Opus palatinum*, wozu er wichtige Berechnungen des *Rhäticus* vorfand, welche bey dessen Leben nicht bekannt geworden, nach dessen Tode aber in fremde Hände gekommen waren. *Rhäticus* hatte nemlich schon mit unendlicher Mühe, und wie die Nachricht sagt, mit einem Aufwande von mehrern tausend Gulden einen Canon der Sinus von zehn zu zehn Secunden für einen Halbmesser $= 1000\ 000\ 000\ 000\ 000$ theils selbst berechnet, theils berechnen lassen. *Pitiscus* fügte noch einige Berechnungen für einen Halbmesser $= 10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$, und noch einige, für einen Halbmesser $= 10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ hinzu. Diese grossen Tafeln nun kamen unter dem Titel *Thesaurus mathematicus*, Francf. 1613. heraus.

§. 402. *Anmerkung*. Die Logarithmen wurden bekanntlich später erfunden. (*Arithm.* §. 237.) Da durch diese die Rechnungen so vortheilhaft abgekürzt werden, so berechnete man auch für die trigonometrischen Linien die zugehörigen Logarithmen, und braucht nun die Logarithmen der Sinus u. s. w. anstatt der Sinus selbst. Durch diese Erfindung sind jene so mühsam berechneten Tafeln — nicht unnütz gemacht, aber doch ausser Gebrauch gekommen. In den neuern trigonometrischen Tafeln sind die

Sinus und Tangenten und ihre Logarithmen einander gegenüber gestellt, oder auch wohl letztere allein, ohne die erstern, abgedruckt. Unter den kleinern Tafeln zum Handgebrauch waren sonst in Deutschland die von *Vlacq* und *Wolf* besorgten Ausgaben die gewöhnlichsten. Bessere aber sind neuerlich von *Schulze* und *Vega* besorgt worden.

Johann Carl Schulze neue und erweiterte Sammlung logarithmischer trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln, Berlin 1778 bey Mylius 2 Bände 8.

Georg Vega logarithmisch trigonometrisches Handbuch, Leipzig 1793. bey Weidmanns. Kl. 4. (1 rthlr. 4 gr.)

Sehr ins hurze gezogene Tafeln zum Gebrauch der Anfänger hat Herr Schulze auch folgendem kleinen Werke beygefügt:

Kurze Anleitung zur ebenen Dreyeck-Messkunst, nebst nöthigen Tabellen, von Joh. Carl Schulze, Berlin 1793. bey Nauck (10 gr.)

Mehrere Nachrichten von trigonometrischen Tafeln ohne und mit Logarithmen findet man in Kästners geometrischen Abhandlungen S. 475. bis zu Ende.

§. 403. *Anmerkung.* Erläuterungen über die Einrichtung solcher Tafeln lassen sich am

besten mündlich beym Gebrauch derselben geben. Hier bemerken wir nur folgendes: Der Logarithme des Sinus totus ist in den gewöhnlichen Tafeln $\equiv 10$, da doch der Sinus totus selbst nicht $\equiv 10\,000\,000\,000$ sondern nur $\equiv 10\,000\,000$ gefunden wird. Dies kömmt daher, dass eigentlich die Tafeln für den Sinus totus $\equiv 10\,000\,000\,000$ berechnet, zur Ersparung des Raums aber, und um die Tafeln wohlfeiler zu liefern, drey Ziffern weggelassen sind. Im Gebrauch macht dies keinen Fehler, da man bloss mit Logarithmen rechnet, ohne dass die Zahlen, welche die Linien selbst ausdrücken, Einfluss in die Rechnung haben können.

§. 404. *Anmerkung.* In den kleinen Tafeln, als denen von Vlacq und Wolf findet man bey dem Winkel $\equiv 0$ den Logarithmen $\equiv 0$, welches aber ein Fehler ist, denn der Logarithme $\equiv 0$ gehört zu der Zahl $\equiv 1$. und dieses würde der Sinus und die Tangente eines

0	I	II	III	IV	V	VI
---	---	----	-----	----	---	----

Winkels $\equiv 0\,0\,0\,0\,0\,4\,27$ seyn (für den Halbmesser der Tafeln, das heist, für den Halbmesser $\equiv 10\,000\,000\,000$).

§. 405. *Anmerkung.* Unter den vielen Zahlen, welche die trigonometrischen Tafeln enthalten, sind nur folgende völlig genau.

Der Sinus totus und dessen Logarithme

Die Tangente 45° und deren Logarithme.

Der Sinus 30° und dessen Logarithme.

§. 405. *Anmerkung.* Beym Gebrauch der trigonometrischen Tafeln bedient man sich oft des Kunstgriffs. (Arithm. §. 246.) Man kann nemlich als richtig annehmen, dass bey kleinen Aenderungen der Bogen durch einige Secunden sich die Unterschiede der trigonometrischen Hülfslinien, wie auch die Unterschiede ihrer Logarithmen, wie die Unterschiede der Bogen selbst verhalten.

1. *Exempel.* Ein Winkel $\alpha = 36^\circ 52' 11''$ sey gegeben. Man sucht seine Tangente oder deren Logarithmen genauer, als die Tafeln angeben, so verfährt man folgendermaassen.

Nächst grösserer Winkel in den Tafeln $= 36^\circ 52' 60''$

Nächst kleinerer Winkel in den Tafeln $= 36^\circ 52'$

Unterschied $= 60''$

Gegebner Winkel $= 36^\circ 52' 11''$

Nächst kleinerer Winkel in den Tafeln $= 36^\circ 52'$

Unterschied $= 11''$

Log. tang. $36^\circ 52' 60'' = 9,8752734$

Log. tang. $36^\circ 52' = 9,8750102$

Unterschied $= 2632$

Nun schliest man nach der Regel de tri

$$60'' : 11'' = 2632 : 482$$

Also zu log. tang. $36^\circ 52' = 9,8750102$

addirt

482

erhält man log. tang. $36^\circ 52' 11'' = 9,8750584$

T

2. *Exempel.* Umgekehrt sey gegeben $\log. \cos. \alpha = 9,9030900$, welcher nicht genau in den Tafeln steht. Man sucht den zugehörigen Winkel α

$$\text{Nächst gr. log. ist } \log. \cos. 36^\circ 52' = 9,9031084$$

$$\text{Nächst kl. log. ist } \log. \cos. 36^\circ 53' = 9,9030136$$

$$\text{Unterschied} = 948$$

$$\text{Gegebner log.} = 9,9030900$$

$$\text{Nächst kl. log.} = 9,9030136$$

$$\text{Unterschied} = 764$$

$$948 : 764 = 60'' : 48''$$

Um $48''$ ist der gesuchte Winkel kleiner als $36^\circ 53'$, weil sein *cosinus* grösser ist, also $\alpha = 36^\circ 52' 11''$.

§. 407. *Anmerkung.* In den bessern Tafeln, z. B. den Schulzischen und Vegaischen, sind die Unterschiede zweyer benachbarten Logarithmen durch 6 oder 60 dividirt hinzugefügt, damit man gleich den Unterschied für 10 oder für 1 Secunde aus den Tafeln nehmen könne.

So findet man z. B. für das 1. Exempel (§. 406.) zwischen den $\log. \text{tang. } 36^\circ 52'$ und $\log. \text{tang. } 36^\circ 53'$ die Differenz für eine Secunde $= 43,86$, welches also eilffmal genommen, die Differenz für $11''$ giebt, $= 482, \dots$ wie oben im Exempel.

So auch für das 2. Exempel §. 406. findet man zwischen $\log. \cos. 36^\circ 52'$ und $\log. \cos.$

36° die Differenz für *eine* Secunde = 15,80. Da nun die Differenz des gegebenen und des nächst kleinern Logarithmen = 764 ist, so wird mit 15,80 in 764,00 dividirt, da man denn zum Quotienten 48" bekömmt, wie oben im Exempel.

*Berechnung ebener rechtwinkllicher Drey-
ecke.*

§. 408. *Lehrsatz. In jedem rechtwinklichen Dreyecke ABC Fig. 121. verhält sich die Hypothenuse zu einer der Catheten, wie der Sinus totus zum Sinus des schiefen Winkels, welcher der Cathete gegenüber liegt.*

I) $\sin. \text{tot.} : \sin. C = CB : BA$ (Fig. 121.)

Beweis. Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser CB einen Bogen BD. Für diesen Halbmesser CB ist nun BA der Sinus von C selbst. Da nun die trigonometrischen Linien bey einerley Winkel dieselbe Verhältniss gegen einander behalten, so verhält sich für jeden Halbmesser die Hypothenuse zu einer Cathete wie der Sinus totus zum Sinus des der Cathete gegenüberliegenden Winkels.

§. 409. *Zusatz.* Mithin auch die Hypothenuse zu einer Cathete wie der Sinus totus zum Cosinus des an der Cathete anliegenden Winkels.

$$\text{II) } \sin. \text{ tot.} : \cos. C = CB : CA;$$

§. 410. *Lehrsatz.* In jedem rechtwinklichten Dreyecke verhält sich eine Cathete zur andern wie der Sinus totus zur Tangente des Winkels, welcher der andern Cathete gegenüberliegt.

$$\text{III) } \sin. \text{ tot.} : \text{tang. } C = CA : AB.$$

Beweis. Man beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Bogen AE, so erhellet die Sache eben so wie in §. 408.

§. 411. *Zusatz.* Auch ist $\sin. \text{ tot.} : \sec. C = CA : CB$ und $\cos. C : \sin. C = CA : AB$, welche Proportionen aber weniger gebraucht werden, die erstere, weil die Secanten und ihre Logarithmen nicht in allen Tafeln stehen; die zweyte, weil man dafür lieber die Proportion III. gebraucht.

§. 412. *Anmerkung.* Die obigen drey Proportionen dienen, alle Aufgaben, die bey rechtwinklichten Dreyecken vorkommen können, aufzulösen.

Im rechtwinklichten Dreyeck ist der rechte Winkel allemal gegeben. Ausser diesem müssen also noch zwey Stücke gegeben seyn.

1) Zwey Seiten.

a) Zwey Catheten. (Erste Aufgabe.)

b) Eine Cathete und die Hypothenuse.
(Zweyte Aufgabe.)

2) Eine Seite und ein Winkel.

a) Die Hypothenuse und ein Winkel.
(Dritte Aufgabe.)

b) Eine Cathete und ein Winkel.

α) Eine Cathete und der anliegende Winkel. (Vierte Aufgabe.)

β) Eine Cathete und der gegenüberliegende Winkel. (Fünfte Aufgabe.)

Da zum Umfange des Dreyecks sechs Stücke, nemlich drey Seiten und drey Winkel, gehören und hiervon immer drey gegeben seyn müssen, so bleiben in jeder Aufgabe drey Stücke zu suchen übrig.

Noch kann ein siebentes Stück, nemlich der Flächeninhalt des Dreyecks, betrachtet werden, welches wir aber bis zu Ende versparen wollen. Die Aufgaben, die wir demnach zuerst zu erörtern haben, sind folgende:

§. 413. *Erste Aufgabe. Gegeben: der rechte Winkel und beyde Catheten. Gesucht:*
1) der eine spitze Winkel C; 2) der andere spitze Winkel B; 3) die Hypothenuse BC.

Auflösung.

$$1) CA:AB = r:\text{tang } C \text{ (aus III.)}$$

$$\text{Exempel. } CA = 175; AB = 128.$$

$$\log. \sin. \text{ tot.} = 10,0000000$$

$$\log. AB = 2,1072100$$

$$12,1072100$$

$$\log. AC = 2,2430380$$

$$\log. \text{tang. } C = 9,8641720$$

$$\log. \text{tang. } 36^\circ 10' = 9,8639152$$

$$\text{Differenz} = 1568$$

$$\text{dividirt mit Differenz } 1'' = 44,19$$

$$\text{Quotient} = 35$$

$$\text{Also } C = 36^\circ 10' 35''$$

$$2) AB:AC = r:\text{tang. } B \text{ (aus III.)}$$

$$3) \sin C:r = AB:BC \text{ (aus I.)}$$

Der zweyte Winkel kann, wenn der erste schon gesucht ist, durch Abziehen von 90° gefunden werden. Um die Hypothenuse zu finden, musste erst ein Winkel gesucht werden, oder aus dem pythagorischen Lehrsatz $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.

§. 414. *Zweyte Aufgabe.* Gegeben: der rechte Winkel, eine Cathete AB und die Hypothenuse BC . Gesucht: 1) der eine spitze Winkel C , der der gegebenen Cathete gegenüberliegt, 2) der andere spitze Winkel B , 3) die andere Cathete AC .

Auflösung.

$$1) BC : AB = r : \sin. C \text{ (aus I.)}$$

$$2) BC : AB = r : \cos. B \text{ (aus II.)}$$

$$3) r : \cos. C = BC : AC \text{ (aus II.)}$$

Die Bemerkung zur vorigen Aufgabe gilt auch hier. Statt der dritten Proportion kann auch AC aus dem pythagorischen Lehrsatz gefunden werden, $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$.

§. 415. *Dritte Aufgabe.* Gegeben: der rechte Winkel, die Hypothenuse BC und ein spitziger Winkel C. Gesucht: 1) die eine Cathete AB, 2) die andere Cathete AC, 3) der andere spitze Winkel B.

Auflösung.

$$1) r : \sin. C = BC : AB \text{ (aus I.)}$$

$$2) r : \cos. C = BC : AC \text{ (aus II.)}$$

$$3) B = 90 - C$$

§. 416. *Vierte Aufgabe.* Gegeben: der rechte Winkel, eine Cathete AC und der anliegende Winkel C. Gesucht: 1) die andere Cathete AB, 2) die Hypothenuse BC; 3) der andere spitze Winkel.

Auflösung.

$$1) r : \tan. C = AC : AB \text{ (aus III.)}$$

$$2) \cos. C : r = AC : BC \text{ (aus II.)}$$

$$3) B = 90^\circ - C.$$

§. 417. *Fünfte Aufgabe.* Gegeben: der rechte Winkel, eine Cathete AB und der gegenüberliegende Winkel C . Gesucht: 1) die andere Cathete AC , 2) die Hypothenuse BC , 3) der andere spitze Winkel B .

Auflösung.

$$1) \text{ tang. } C : r = AB : AC \text{ (aus III.)}$$

$$2) \text{ sin. } C : r = AB : BC \text{ (aus I.)}$$

$$3) B = 90 - C$$

§. 418. *Zusatz.* Ein gleichschenklichtes Dreyeck kann durch obige Proportionen ebenfalls berechnet werden, denn es wird durch die senkrechte Linie BD auf die Grundlinie Fig. 122. in zwey deckende rechtwinklichte Dreyecke zertheilt. Nun mögen drey Stücke, welche man will, in dem gleichschenklichten Dreyecke gegeben seyn, so sind dadurch auch drey Stücke in einem der beyden rechtwinklichten Dreyecke gegeben. Letzteres kann also aufgelöst werden und durch dasselbe ist dann zugleich das gleichschenklichte aufgelöst.

§. 419. *Anmerkung.* Vom Gebrauch des rechtwinklichten und des gleichschenklichten Dreyecks zum Winkelmessen, vom geradlinichten Transporteur, vom Proportionalzirkel s. m. Kästners Trigonom. 7. u. 9. Satz.

Die nun folgenden Sätze gelten für ebene Dreyecke überhaupt, auch für rechtwinklichte.

Berechnung ebener schiefwinklischer Dreyecke.

§. 420. *Lehrsatz. In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten gegen einander wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel, z. B. I. Sin. A : Sin. B = BC : AC.*

Beweis. Man beschreibe einen Kreis um das Dreyeck, Fig. 123. und Fig. 124. und ziehe aus dessen Mittelpuncte M die Linien MA, MC, MD, letztere senkrecht auf AC, so ist $AD = \frac{1}{2}AC = \sin. A$ für den Halbmesser des umschriebenen Kreises. Völlig eben so erhellet, dass die Hälften der übrigen Seiten, die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel für den Halbmesser des umschriebenen Kreises sind. Da sich nun die ganzen Seiten nothwendig wie ihre Hälften verhalten, so verhalten sich die Seiten wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

§. 421. *Lehrsatz. In jedem Dreyecke verhält sich die Summe zweyer Seiten zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe der ihnen gegenüberliegenden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz, z. B. II. $AC + AB : AC - AB = \tan. \frac{1}{2}(B + C) : \tan. \frac{1}{2}(B - C)$. Fig. 125.*

Beweis. Zum Behuf des Beweises beschreibe man mit der kleinern Seite AB einen Kreis, ver-

längere die grössere Seite CA bis E, ziehe BD und mit dieser parallel CF, endlich noch EF, so ist:

$$CE = CA + AB$$

$$CD = CA - AB$$

$$ECF = \frac{1}{2}(B + C), \text{ denn } ECF = EDB = \frac{1}{2}EAB,$$

weil nemlich in dem gleichschenkligen Dreyeck ABD die Winkel D und B einander gleich sind. Und $\frac{1}{2}EAB = \frac{1}{2}B + C$.

$$BCF = \frac{1}{2}(B - C), \text{ denn } BCF = ECF - C = \frac{1}{2}(B + C) - C = \frac{1}{2}(B - C).$$

Da nun $F = B = 90^\circ$ ist, so ist, wenn CF als Halbmesser angenommen wird,

$$FE = \text{tang. } ECF = \text{tang. } \frac{1}{2}(B + C)$$

$$FB = \text{tang. } BCF = \text{tang. } \frac{1}{2}(B - C)$$

Nun aber ist

$$CE : CD = FE : FB$$

$$\text{d. h. } CA + AB : CA - AB = \text{tang. } \frac{1}{2}(B + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(B - C)$$

§. 422. Zusatz. Da $CA : AB = \sin. B : \sin. C$, mithin wegen (Arithm. §. 175.) $CA + AB : CA - AB = \sin. B + \sin. C : \sin. B - \sin. C$, so ist $\text{tang. } \frac{1}{2}(B + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(B - C) = \sin. B + \sin. C : \sin. B - \sin. C$, das heisst: Summe und Unterschied der Sinus zweyer Winkel verhalten sich gegen einander wie die Tangenten

der halben Summe und des halben Unterschieds dieser Winkel.

§. 423. *Zusatz.* Eine ähnliche Proportion lässt sich hieraus für die Cosinus zweyer Winkel herleiten. Es ist nemlich $\cos. B = \sin. (90^\circ - B)$ und $\cos. C = \sin. (90^\circ - C)$. Wenn wir nun $90^\circ - B = \beta$ und $90^\circ - C = \gamma$ nennen, so ist:

$$\sin. \beta + \sin. \gamma : \sin. \gamma - \sin. \beta = \text{tang. } \frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \text{tang. } \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$$

$$\text{oder } \cos. B + \cos. C : \cos. C - \cos. B = \text{tang. } \frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \text{tang. } \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$$

$$\text{Es ist aber } \beta + \gamma = 180 - B - C = 180 - (B + C)$$

$$\text{also } \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90 - \frac{1}{2}(B + C)$$

$$\text{und } \text{tang. } (\frac{1}{2}\beta + \gamma) = \cot. \frac{1}{2}(B + C)$$

$$\text{Es ist ferner } \gamma - \beta = B - C$$

$$\text{also } \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \frac{1}{2}(B - C)$$

$$\text{und } \text{tang. } \frac{1}{2}(\gamma - \beta) = \text{tang. } \frac{1}{2}(B - C)$$

Folglich wird obige Proportion nun folgende:

$$\cos. B + \cos. C : \cos. C - \cos. B = \cot. \frac{1}{2}(B + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(B - C)$$

das heisst: die Summe des Cosinus zweyer Winkel verhält sich zu dem Unterschiede des Cosinus wie die Cotangente der halben Summe der beyden Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Diese beyden Sätze des vorigen und gegenwärtigen Paragraphs werden wir in der *sphärischen* Trigonometrie anzuwenden Gelegenheit haben.

§. 424. *Anmerkung.* In einem schiefwinklichten oder überhaupt in jedem Dreyecke können gegeben seyn:

1) Zwey Winkel und eine Seite. (Erste Aufgabe.)

2) Zwey Seiten und ein Winkel.

a) Zwey Seiten und ein Winkel, der einer Seite gegenüberliegt. (Zweyte Aufgabe.)

b) Zwey Seiten und der zwischenliegende Winkel. (Dritte Aufgabe.)

3) Drey Seiten. (Vierte Aufgabe.)

§. 425. *Erste Aufgabe.* Gegeben: Zwey Winkel *A* und *B* und eine Seite *BC*, die dem Winkel *A* gegenüberliegt. Gesucht: 1) der dritte Winkel *C*, 2) die Seite *AC*, 3) die Seite *AB*.

Auflösung.

$$1) C = 180^\circ - (A + B)$$

$$2) \sin. A : \sin. B = BC : AC \text{ (aus I.)}$$

$$3) \sin. A : \sin. (A + B) = BC : AB \text{ (aus I. und §. 380.)}$$

Da durch zwey Winkel A und B auch der dritte C bekannt ist, so braucht man keine besondere Aufgabe für den Fall zu machen, da die gegebene Seite zwischen beyden Winkeln liegt.

§. 426. *Zweyte Aufgabe.* Gegeben: zwey Seiten AB und BC und ein Winkel A, welcher der einen Seite gegenübersteht. Gesucht: 1) der Winkel C, 2) der Winkel B, 3) die Seite AC.

Auflösung.

$$1) \text{ BC : AB } = \sin. A : \sin. C \text{ (aus I.)}$$

$$2) B = 180 - (A + C)$$

$$3) \sin. A : \sin. B = BC : AC \text{ (aus I.)}$$

Es kann hier eine Zweydeutigkeit Statt finden, nemlich in dem Falle, wenn diejenige unter den gegebenen Seiten, welche dem gegebenen Winkel gegenüberliegt, kleiner ist als die andere gegebene Seite. Fig. 126. Wenn BC kleiner als AB ist, so können die gegebenen Dinge sowohl in dem Dreyeck ABC' als in dem ABC'' Statt finden. Die trigonometrische Rechnung giebt nur sin. C und dieser kann sowohl dem spitzen Winkel C' als dem stumpfen C'' zugehören.

Ist der gegebene Winkel recht oder stumpf, so fällt die Zweydeutigkeit weg, denn alsdann kann C nicht anders als spitzig seyn.

§. 427. Dritte Aufgabe. Gegeben: Zwey Seiten AB und AC und der zwischenliegende Winkel A . Gesucht: 1) der Winkel B , 2) der Winkel C , 3) die Seite BC .

Auflösung.

$$1) \quad CA + AB : CA - AB = \text{tang. } \frac{1}{2}(B + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(B - C) \quad (\text{aus II.})$$

$$B = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(B - C)$$

$$2) \quad C = \frac{1}{2}(B + C) - \frac{1}{2}(B - C) \text{ oder } = 180^\circ - (A + B)$$

$$3) \quad \sin. B : \sin. A = AC : BC.$$

Diese Aufgabe kann auch so aufgelöst werden, dass man das Dreyeck; Fig 127. in zwey rechtwinklichte theilt. Im rechtwinklichten Dreyeck ABD ist alsdann $r : \cos. A = AB : AD$. Durch AD ist DC bekannt, und da $BD^2 = BC^2 - DC^2 = AB^2 - AD^2$, so ist $BC^2 = AB^2 - AD^2 + DC^2$, woraus BC und folglich alles Übrige gefunden wird.

§. 428. Vierte Aufgabe. Gegeben: alle drey Seiten. Gesucht: 1) der Winkel A , 2) der Winkel C , 3) der Winkel B . Fig. 127.

Auflösung.

$$1) \quad AD + DC : AB + BC = BC - AB : DC - AD \quad (\S. 202.)$$

$$AD = \frac{1}{2}(AD + DC) - \frac{1}{2}(DC - AD)$$

$$AB : AD = r : \cos. A$$

$$2) \quad DC = \frac{1}{2}(AD + DC) + \frac{1}{2}(DC - AD)$$

$$BC : DC = r : \cos. C$$

$$3) \quad B = 180^\circ - (A + C)$$

§. 429. *Zusatz.* Um Formeln für den Cosinus und Sinus eines Winkels im Dreyeck durch die drey Seiten ausgedrückt zu finden, bezeichne man die Seiten mit den kleinen Buchstaben der gegenüberliegenden Winkel. Also sey $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ und der Unterschied der Abschnitte $CD - AD = d$.

$$\text{Nun ist } AD + DC : BC + AB = BC - AB : CD - AD \quad (\S. 202.)$$

$$\text{oder } b : a + c = a - c : d$$

$$\text{also } d = \frac{(a + c) \cdot (a - c)}{b} = \frac{a^2 - c^2}{b}$$

$$\text{und } AD = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$\text{Nun ist } AB : AD = r : \cos. A$$

$$\text{das ist } c : \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} = r : \cos. A$$

$$\text{Also für } r = 1 \text{ ist } \cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

In Worte übersetzt: Man mache das Quadrat aller drey Seiten. Ziehe das Quadrat der Seite, die dem gesuchten Winkel gegenüberliegt, von der Summe der Quadrate der beyden andern Seiten ab, und dividire den Rest durch das doppelte Product dieser beyden andern Sei-

ten, die den gesuchten Winkel einschliessen. Der Quotient ist der Cosinus des gesuchten Winkels für den Halbmesser $= 1$.

§. 430. *Zusatz.* Um den Sinus eines Winkels durch die drey Seiten auszudrücken, hat man für $r = 1$ folgendes:

$$\sin. A^2 = 1 - \cos. A^2 = (1 + \cos. A) \cdot (1 - \cos. A).$$

Diese beyden Factoren lassen sich folgendermaassen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \text{Der erste } 1 + \cos. A &= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \\ &= \frac{(a + b + c) \cdot (b + c - a)}{2bc}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Der zweyte } 1 - \cos. A &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \\ &= \frac{(a - (b - c)) \cdot (a + (b - c))}{2bc} = \frac{(a + c - b) \cdot (a + b - c)}{2bc} \end{aligned}$$

Folglich

$$\sin. A^2 = \frac{(a + b + c)(b + c - a) \cdot (a + b - c)}{2bc \cdot 2bc}$$

und $\sin. A =$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}}{2bc}$$

In Worte übersetzt: Man addire alle drey Seiten, ziehe die erste, zweyte, dritte Seite von der Summe der beyden übrigen ab. Multiplicire jene Summe der drey Seiten und diese drey Reste mit einander, ziehe aus dem Producte die Quadratwurzel, dividire diese Wurzel durch das doppelte Product der beyden Seiten, die den gesuchten Winkel einschliessen. Der Quotient ist der Sinus des gesuchten Winkels für den Halbmesser $= 1$.

§. 431. *Zusatz.* Die Formel für den Cosinus §. 429. zeigt, ob der Winkel spitzig oder stumpf ist; ist er spitzig, so ist das, was die Formel giebt, positiv; ist er stumpf, so ist es negativ; letzteres nemlich wenn $a^2 > b^2 + c^2$, das heisst: wenn das Quadrat der dem Winkel gegenüberliegenden Seite grösser ist als die Quadrate der Seiten, welche den Winkel einschliessen, zusammen genommen. Wenn $a^2 = b^2 + c^2$, so ist $A = 90^\circ$ und $\cos. A = 0$, wie es auch die Formel giebt. Vergl. m. Eukl. II. 12. 13.

§. 432. *Zusatz.* Aus der Formel für den Cosinus §. 429. folgt auch eine Formel zur Auflösung der dritten Aufgabe §. 427. Aus zwey Seiten b und c mit dem eingeschlossenen Winkel A die dritte Seite C zu finden, hat man nem-

lich aus §. 429. folgendes: $\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

also $2bc \cdot \cos. A = b^2 + c^2 - a^2$ oder $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A$, folglich $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos. A}$.

§. 433. *Anmerkung.* Obiges enthält die Aufgaben der ebenen Trigonometrie in so fern sie bloss die sechs Stücke des Umfangs des Dreyecks betreffen. Wird aber auch der Flächeninhalt in Betrachtung gezogen, so finden folgende Fälle Statt:

Es können gegeben seyn:

I. Drey Stücke des Umfangs; (der Flächeninhalt wird gesucht)

1. Zwey Seiten und ein Winkel.

a. Zwischenliegend. (Erste Aufgabe.)

b. Anliegend.

2. Zwey Winkel und eine Seite.

3. Drey Seiten. (Zweyte Aufgabe.)

II. Der Flächeninhalt und zwey Stücke des Umfangs; (ein drittes Stück des Umfangs wird gesucht.)

1. Eine Seite und ein Winkel.

a. Anliegend. (Dritte Aufgabe.)

b. Gegenüberliegend. (Vierte Aufgabe.)

2. Zwey Seiten. (Fünfte Aufgabe.)

3. Zwey Winkel. (Sechste Aufgabe.)

§. 434. *Erste Aufgabe. Gegeben: zwey Seiten b und c und der zwischenliegende Winkel A . Gesucht: der Flächeninhalt $= f$.* Fig. 127.

Auflösung. Des Dreyecks Höhe über b sey $= h$, so ist $h = c \sin. A$ für $r = 1$, und $f = \frac{bh}{2} = \frac{bc \sin. A}{2}$.

Die beyden Fälle, wo zwey Seiten und ein anliegender Winkel und wo zwey Winkel und eine Seite gegeben sind, müssen auf diesen zurückgebracht werden, d. h. man sucht zuvor-derst ein viertes Stück des Umfangs, so dass nun zwey Seiten und ein zwischenliegender Winkel bekannt werden. Wir haben daher nicht nöthig diese Fälle besonders aufzulösen.

§. 435. *Zweyte Aufgabe. Gegeben: alle drey Seiten. Gesucht: der Flächeninhalt.*

Auflösung. Es ist $f = \frac{bc \sin. A}{2}$ (§. 434.)

Nimmt man nun für $\sin. A$ die Formel §. 430, so erhält man $f =$

$$\frac{r((a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c))}{2 \cdot 2}$$

2 . 2

U 2

Man kann diesen Ausdruck auch noch folgendermaassen verändern: $f = r$

$$\left(\frac{(a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \right)$$

Nun ist, wenn wir die Summe aller drey Seiten

$$= s \text{ nennen, } \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}s, \quad \frac{b+c-a}{2}$$

$$= \frac{1}{2}s - a; \quad \frac{a+c-b}{2} = \frac{1}{2}s - b; \quad \frac{a+b-c}{2}$$

$$= \frac{1}{2}s - c. \text{ Also erhält man folgende bequeme Formel } f = r \left(\frac{1}{2}s \cdot \left(\frac{1}{2}s - a \right) \cdot \left(\frac{1}{2}s - b \right) \cdot \left(\frac{1}{2}s - c \right) \right)$$

In Worte übersetzt: Von der halben Summe der Seiten ziehe man die erste, zweyte, dritte Seite ab, multiplicire die halbe Summe und diese drey Reste mit einander und ziehe aus dem Product die Quadratwurzel.

In Praxi ist diese Aufgabe sehr nützlich.

§. 436. *Dritte Aufgabe. Gegeben: eine Seite c, ein daranliegender Winkel A und der Flächeninhalt f. Gesucht: die Seite b.*

$$\text{Auflösung. } f = \frac{bc \sin. A}{2}, \quad (\S. 434.) \text{ folgl-}$$

lich $b = \frac{2f}{c \sin. A}$. Die übrigen Stücke des Umfangs werden ferner leicht gefunden.

§. 437. *Vierte Aufgabe. Gegeben: eine Seite b, der gegenüberliegende Winkel B und*

der Flächeninhalt f . Gesucht: ein anliegender Winkel A .

Auflösung. Durch f und b ist auch die Höhe bekannt $h = \frac{2f}{b}$.

Um das Dreyeck, Fig. 128. 129. sey ein Kreis beschrieben und aus dessen Mittelpunkt M senkrecht auf b , MN parallel mit b , so ist durch B auch der Winkel AME bekannt. Nämlich wenn B spitzig, so ist $AME = B$; ist B stumpf, so ist $AME = 180 - B$. In beyden Fällen $\sin. AME = \sin. B$. Auch ist $AE = \frac{1}{2}b$ bekannt.

Es lässt sich also MA der Halbmesser des Kreises finden, $MA = \frac{b}{2 \sin. B}$ (den sinus totus $= 1$ gesetzt.)

Auch $ME = \frac{b \cdot \cos. B}{2 \sin. B} = \frac{b}{2 \tan. B}$ positiv oder negativ, nachdem B spitzig oder stumpf ist.

Im Dreyeck BMN ist $BM = AM = \frac{b}{2 \sin. B}$ und $BN = h - ME$ nebst dem rechten Winkel bey N bekannt, also lässt sich der Winkel BMN berechnen.

Auch weiss man CMN , nämlich wenn B spitzig ist, $CMN = 90^\circ - B$, wenn B stumpf ist, $CMN = B - 90^\circ$.

Also auch $BMC = BMN \pm CMN = BMN + 90^\circ - B$.

Endlich $A = \frac{1}{2}BMC$.

Die übrigen Stücke des Dreyecks werden ferner leicht gefunden.

§. 438. *Fünfte Aufgabe.* Gegeben: zwey Seiten b und c und der Flächeninhalt f . Gesucht: der Winkel A , den die gegebenen Seiten einschliessen.

Auflösung. Aus $f = \frac{bc \sin. A}{2}$ (§. 434.) hat man sogleich $\sin. A = \frac{2f}{bc}$.

§. 439. *Sechste Aufgabe.* Gegeben: zwey Winkel A und B und der Flächeninhalt f . Gesucht: die Seite c , welche zwischen den gegebenen Winkeln liegt.

Auflös. Aus §. 434. hat man $b = \frac{2f}{c \sin. A}$.

Aber aus der Proportion $\sin. C : \sin. B = c : b$ hat man auch $b = \frac{c \sin. B}{\sin. C}$. Folglich ist $\frac{2f}{c \sin. A}$

$= \frac{c \sin. B}{\sin. C}$ oder $2f \sin. C = c^2 \sin. A \sin. B$;

und hieraus erhält man $c = \sqrt{\frac{2f \sin. C}{\sin. A \sin. B}}$

worin C durch A und B bekannt ist.

§. 440. *Anmerkung.* Ich habe absichtlich zu obigen Aufgaben keine Exempel ausser dem ersten §. 413. hinzugefügt, um die Fälle selbst mehr zusammenzudrängen, wodurch die Übersicht dem Anfänger erleichtert wird, und um den Raum zu sparen. Übrigens ist die Rechnung mit Logarithmen auch sehr leicht und bey einem Exempel wie bey dem andern. Zur Übung müssen bey jeder Aufgabe einige berechnet werden.

Die bisherigen Lehren werden auf mancherley Art in der ganzen Mathematik angewendet. Wir wollen obigen Aufgaben nur noch folgende zum Schlusse beyfügen.

§. 441. *Aufgabe.* Aus den drey Seiten eines Dreyecks den Halbmesser des Kreises zu finden, der um dasselbe beschrieben werden kann. Fig. 128.

Auflösung. In §. 437. war der Halbmesser

$$= \frac{b}{2 \sin. B}$$
 und nach §. 430. ist $\sin. B =$

$$\frac{r((a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c))}{2ac}$$

Folglich ist der Halbmesser

$$= \frac{abc}{r((a+b+c) \cdot (b+c-a) \cdot (a+c-b) \cdot (a+b-c))}$$

*Grundbegriffe der sphärischen
Trigonometrie.*

§. 442. *Erklärung.* Ein *sphärisches Dreyeck* ist ein Stück einer Kugelfläche, welches von drey Bogen grösster Kreise begränzt wird. Die *sphärische Trigonometrie* lehrt, aus drey gegebenen Stücken eines sphärischen Dreyecks die übrigen zu berechnen.

§. 443. *Erklärung.* Ein *rechtwinklichtes, sphärisches Dreyeck* ist ein solches, worin wenigstens *ein* rechter Winkel ist. Es können aber in einem sphärischen Dreyeck zwey auch alle drey rechte oder gar stumpfe Winkel seyn, wodurch es sich also sehr vom ebenen Dreyeck unterscheidet. Ein *schiefwinklichtes, sphärisches Dreyeck* ist ein solches, welches keinen rechten Winkel hat.

§. 444. *Zusatz.* Da die Seiten des sphärischen Dreyecks Kreisbogen sind, so werden sie sowohl wie die Winkel in Graden ausgedrückt. Der Mittelpunkt der Kugel, Fig. 130. sey M, so ist die Seite BC das Maass des Winkels am Mittelpuncte BMC; so auch die übrigen Seiten. Es wird also hier auch von Sinus der Seiten die Rede seyn. Wieder eine Verschiedenheit von ebenen Dreyecken.

§. 445. *Zusatz.* In ebenen Dreyecken konnte aus blossen Winkeln nichts bestimmt werden,

unter den gegebenen Stücken musste wenigstens eine Seite seyn. Hier aber können wohl alle gegebene Stücke Winkel seyn, weil die Seiten nach Graden bestimmt werden. Ihre Länge in Längenmaasse daraus zu erfahren müsste freylich der Halbmesser der Kugel bekannt seyn.

§. 446. *Zusatz.* Die sphärischen Winkel, welche die Seiten des Dreyecks mit einander machen, sind den Winkeln gleich, unter welchen die Ebenen der grössten Kreise gegeneinander geneigt sind. (§. 322.)

Man ziehe von B die Linie BF senkrecht auf die Ebene AMC und BE senkrecht auf den Durchschnitt MC, so ist BEF der Neigungswinkel der beyden Ebenen BMC und AMC. §. 244.

So ist auch BGF der Neigungswinkel der beyden Ebenen BMA und AMC.

Also sind BEF und BGF den sphärischen Winkeln C und A gleich.

§. 447. *Zusatz.* Auf einer Kugelfläche können sphärische Dreyecke Statt finden, deren Seiten grösser als 180° sind. Allein alsdann hat immer ein von denselben drey Kreisen gebildetes Nebendreyeck Statt, dessen Seiten kleiner als 180° sind. Daher man nur solche sphärische Dreyecke zu betrachten braucht, deren Seiten kleiner als 180° sind.

§. 448. *Zusatz.* Die drey Winkel am Mittelpunkte der Kugel AMB, BMC, CMA bilden eine Ecke und betragen zusammen weniger als 360° , (§. 252.) denn wenn sie 360° betrügen, so würden sie in einer Ebene liegen und keine Ecke mehr bilden. Folglich betragen auch die drey Seiten eines sphärischen Dreyecks, da sie die Maasse jener Winkel sind, weniger als 360° .

(Für Anfänger ist es nützlich und fast nothwendig eine wirkliche Kugel zu Hülfe zu nehmen, auf welcher man die grössten Kreise mit Kreide oder Bleystift zeichnen oder etwa durch schmale Papierstreifchen vorstellen kann, die sich nach Gefallen verschieben lassen. Um auf einer solchen Kugel die Bogen der grössten Kreise zu messen kann man sich eines mit dem Halbmesser der Kugel beschriebenen, in seine Grade eingetheilten, auf Pappe gezogenen Quadranten bedienen.)

Berechnung sphärischer rechtwinkllicher Dreyecke.

§. 449. *Lehrsatz.* Im rechtwinklichten, sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel. Fig. 130.

Beweis. Es ist $BF = \sin. BA$ für den Halbmesser der Kugel, so auch $BE = \sin. BC$ für

den Halbmesser der Kugel. Aber im ebenen Dreyeck BFE ist $BF:BE = \sin. E:\sin. F = \sin. C:\sin. A$, weil $E = C$ (§. 446.) und $F = 90^\circ = A$. mithin $\sin. BA:\sin. BC = \sin. C:\sin. A$.

Wenn man von C eine senkrechte Linie auf AM und eine andere senkrecht auf BM zieht, so erhellet auf eben die Art, dass auch $\sin. BC:\sin. AC = \sin. A:\sin. B$.

§. 450. Zusatz. Hieraus folgen sechs Proportionen, welche zur Auflösung rechtwinklichter sphärischer Dreyecke dienen.

I. *Der Sinus totus verhält sich zum Sinus eines der schiefen Winkel wie der Sinus der Hypothenuse zum Sinus der gegenüberliegenden Cathete.* $r:\sin. C = \sin. BC:\sin. AB$.

Dies folgt unmittelbar aus §. 449.

II. *Der Sinus totus zur Tangente eines der schiefen Winkel wie der Sinus der anliegenden Cathete zur Tangente der gegenüberliegenden Cathete.* $r:\text{tang. } C = \sin. AC:\text{tang. } AB$.

Dies erhellet so:

$$MF:FB = r:\text{tang. } AB$$

$$FB:FE = \text{tang. } C:r$$

$$\text{Also } MF:FE = \text{tang. } C:\text{tang. } AB$$

$$\text{Auch } MF:FE = r:\sin. AC. \text{ (im Dreyeck MFE.)}$$

$$\text{folglich } r:\sin. AC = \text{tang. } C:\text{tang. } AB$$

$$\text{oder } r:\text{tang. } C = \sin. AC:\text{tang. } AB.$$

III. *Der Sinus totus zum Cosinus einer Cathete wie der Cosinus der andern Cathete zum Cosinus der Hypothenuse.* $r : \cos. AB = \cos. AC : \cos. BC.$

Dies erhellet so: Man verlängere CB bis K und CA bis L, bis CK und CL Quadranten werden und lege durch K und L einen grössten Kreis, so ist C dessen Pol und K und L sind rechte Winkel. (§. 318.)

Da ferner LK und AB auf LC senkrecht sind, so gehen beyde durch den Pol von LC, ihr Durchschnittspunct P ist also dieser Pol. §. 318.

Im rechtwinklichten Dreyeck PKB ist also

$$r : \sin. P = \sin. PB : \sin. BK \text{ (I.)}$$

das ist $r : \cos. AC = \cos. AB : \cos. BC$

denn P, PB, BK sind die Complemente von AC, AB, BC.

IV. *Der Sinus totus zum Sinus eines schiefen Winkels wie der Cosinus der anliegenden Cathete zum Cosinus des andern schiefen Winkels.* $r : \sin. B = \cos. AB : \cos. C.$

Denn im Dreyeck PKB ist

$$r : \sin. B = \sin. PB : \sin. PK \text{ (I.)}$$

Also im Dreyeck ABC

$$r : \sin. B = \cos. AB : \cos. C$$

der Winkel B ist in beyden Dreyecken gleich.

V. *Der Sinus totus zum Cosinus eines schiefen Winkels wie die Cotangente der anliegen-*

den Cathete zur Cotangente der Hypothenuse.

$$r : \cos. C = \cot. AC : \cot. BC.$$

Im Dreyeck PKB ist

$$r : \sin. KP = \tan. P : \tan. KB \text{ (II.)}$$

also im Dreyeck ABC

$$r : \cos. C = \cot. AC : \cot. BC$$

VI. Der Sinus totus zur Tangente eines schiefen Winkels wie der Cosinus der Hypothenuse zur Cotangente des andern schiefen Winkels. $r : \tan. B = \cos. BC : \cot. C.$

Denn im Dreyeck PKB ist

$$r : \tan. B = \sin. KB : \tan. KP \text{ (II.)}$$

Also im Dreyeck ABC

$$r : \tan. B = \cos. BC : \cot. C$$

§. 451. *Zusatz.* Man findet diese sechs Proportionen nicht auf einerley Art in allen Lehrbüchern ausgedrückt. Es lassen sich auch aus denselben mehrere andere herleiten, die zur Auflösung dieser oder jenen Aufgabe bequemer sind, indem man gern den Sinus totus im ersten Gliede hat.

So kann man erstlich allenthalben die schiefen Winkel so wie auch die Catheten eine statt der andern setzen. §. 449.

Man kann zweytens den Satz anwenden, dass die Tangenten zweyer Winkel oder Bogen sich umgekehrt wie die Cotangenten verhalten. (§. 386.)

Man kann drittens den Satz anwenden, dass der Sinus totus sich zur Tangente eines Winkels verhält wie die Cotangente eben dieses Winkels zum Sinus totus. (§. 386.)

Hierdurch erhält man noch folgende Proportionen:

- VII. $r : \cot. AB = \sin. AC : \cot. C$ (aus II.)
- VIII. $r : \cos. C = \tan. BC : \tan. AC$ (aus V.)
- IX. $r : \tan. C = \cos. BC : \cot. B$ (aus VI.)
- X. $r : \cot. C = \tan. AB : \sin. AC$ (aus II.)
- XI. $r : \tan. AC = \cot. BC : \cos. C$ (aus V.)
- XII. $r : \cot. C = \cot. B : \cos. BC$ (aus VI.)

Die IXte giebt indessen nichts anders als die VIte mit Verwechselung von B und C.

§. 452. *Anmerkung.* Im rechtwinklichten, sphärischen Dreyeck ist zuvörderst der rechte Winkel allemal gegeben. Ausser diesem müssen also noch zwey Stücke gegeben seyn:

1. Zwey Winkel. (Erste Aufgabe.)

2. Zwey Seiten.

a. Catheten. (Zweyte Aufgabe.)

b. Cathete und Hypothenuse. (Dritte Aufgabe.)

3. Eine Seite und ein Winkel.

a. Hypothenuse und ein Winkel. (Vierte Aufgabe.)

b. Cathete und ein Winkel.

a. Anliegend. (Fünfte Aufgabe.)*β.* Gegenüberliegend. (Sechste Aufgabe.)

§. 453. *Erste Aufgabe. Gegeben: Rechter Winkel und beyde schiefe Winkel. Gesucht: 1) Eine Cathete AB, 2) die andere Cathete AC, 3) die Hypothenuse BC.*

Auflösung. 1) $\sin. B : r = \cos. C : \cos. AB$ (IV)
 2) $\sin. C : r = \cos. B : \cos. AC$ (IV.)
 3) $\text{tang.} B : r = \cot. C : \cos. BC$ (VI.)
 oder lieber $r : \cot. C = \cot. B : \cos. BC$ (XII.)

§. 454. *Zweyte Aufgabe. Gegeben: Rechter Winkel und beyde Catheten. Gesucht: 1) ein schiefer Winkel B, 2) der andere schiefe Winkel C, 3) die Hypothenuse BC.*

Auflös. 1) $\sin. AB : \text{tang.} AC = r : \text{tang.} B$ (II.)
 od. lieb. $r : \cot. AC = \sin. AB : \cot. B$ (VII.)
 2) $\sin. AC : \text{tang.} AB = r : \text{tang.} C$ (II.)
 od. lieb. $r : \cot. AB = \sin. AC : \cot. C$ (VII.)
 3) $r : \cos. AB = \cos. AC : \cos. BC$ (III.)

§. 455. *Dritte Aufgabe. Gegeben: rechter Winkel, eine Cathete AB, Hypothenuse BC. Gesucht: 1) andere Cathete AC, 2) Winkel B, 3) Winkel C.*

Auflös. 1) $\cos. AB : r = \cos. BC : \cos. AC$ (III.)
 2) $\cot. AB : \cot. BC = r : \cos. B$ (V.)

od. lieb. $r : \text{tang. AB} = \text{cot. BC} : \cos. B$ (XI.)
 3) $\sin. BC : \sin. AB = r : \sin. C$ (I.)

§. 456. *Vierte Aufgabe. Gegeben: rechter Winkel, Hypothenuse und ein schiefer Winkel B. Gesucht: 1) Cathete AB, 2) Cathete AC, 3) Winkel C.*

Auflös. 1) $\cos. B : r = \text{cot. BC} : \text{cot. AB}$ (V.)
 od. lieb. $r : \cos. B = \text{tang. BC} : \text{tang. AB}$ (VIII.)
 2) $r : \sin. B = \sin. BC : \sin. AC$ (I.)
 3) $r : \text{tang. B} = \cos. BC : \cot. C$ (VI.)

§. 457. *Fünfte Aufgabe. Gegeben: rechter Winkel, Cathete AB, anliegender Winkel B. Gesucht: 1) Hypothenuse BC, 2) andere Cathete AC, 3) Winkel C.*

Auflös. 1) $r : \cos. B = \text{cot. AB} : \text{cot. BC}$ (V.)
 2) $r : \text{tang. B} = \sin. AB : \text{tang. AC}$ (II.)
 3) $r : \sin. B = \cos. AB : \cos. C$ (IV.)

§. 458. *Sechste Aufgabe. Gegeben: rechter Winkel, eine Cathete AB, gegenüberliegender Winkel C. Gesucht: 1) Hypothenuse BC, 2) andere Cathete AC, 3) Winkel B.*

Auflös. 1) $\sin. C : r = \sin. AB : \sin. BC$ (I.)
 2) $\text{tang. C} : r = \text{tang. AB} : \sin. AC$ (II.)
 od. lieb. $r : \cot. C = \text{tang. AB} : \sin. AC$ (X.)
 3) $\cos. AB : \cos. C = r : \sin. B$ (IV.)

§. 459. *Zusatz. Ob das Gesuchte kleiner oder grösser als 90° sey, ergiebt sich in vielen*

der obigen Fälle aus dem positiven oder negativen Zeichen, nemlich wenn das letzte Glied eine Tangente, ein Cosinus oder eine Cotangente ist, welche Linien im zweyten Quadranten negativ werden.

In fünf Fällen aber ist das letzte Glied ein Sinus, der auch im zweyten Quadranten wie im ersten positiv bleibt, in diesen Fällen kann man also obiges Kennzeichen nicht brauchen. Diese Fälle sind:

Dritte Aufgabe 3, vierte Aufgabe 2 und sechste Aufgabe alle drey Fälle.

Unter diesen fünf Fällen können jedoch die beyden ersten noch folgenden Kennzeichen entschieden werden.

§. 460. *Zusatz.* Eine Cathete und der gegenüberliegende Winkel sind gleichartig, das heisst: zugleich kleiner oder grösser als 90° .

Denn $r : \text{tang. } C = \sin. AC : \text{tang. } AB. \text{ (II.)}$

also $\text{tang. } AB = \frac{\text{tang. } C \cdot \sin. AC}{r}$

folglich tang. AB positiv oder negativ, je nachdem es tang. C ist, das heisst: AB kleiner oder grösser als 90° , je nachdem es C ist.

§. 461. *Zusatz.* In der letzten Aufgabe bleibt also die Zweydeutigkeit unentschieden, (wenn sie nicht aus andern Umständen gehoben wird)

wie denn dieses auch aus der Figur erhellet, denn die gegebenen Stücke können sowohl in dem Dreyeck abC als in dem Dreyeck ABC Statt finden. Im Dreyeck abC ist aC soviel über einen Quadranten als AC unter demselben.

§. 462. *Zusatz.* Die bisherigen Auflösungen rechtwinklischer sphärischer Dreyecke können auch bey solchen schiefwinklichten gebraucht werden, wo eine Seite ein Quadrant ist. Ist (Fig. 131. und 132.) $BC = 90^\circ$ so mache man auch $CD = 90^\circ$ und lege durch B und D einen grössten Kreis. Der Pol dieses grössten Kreises ist C und der Bogen BD ist das Maass des Winkels C , auch steht er auf CB und CA senkrecht.

Das Dreyeck BAD ist also ein rechtwinklichtes, worin $D = 90^\circ$, $DB = C$, $DA = CA - 90$ (Fig. 131.) oder $90 - CA$ (Fig. 132.) $DBA = CBA - 90$ (Fig. 131.) oder $90 - CBA$. (Fig. 132.)

Man mag nun von dem schiefwinklichten Dreyeck, welche drey Stücke man will als gegeben annehmen, so sind dadurch zugleich drey Stücke des rechtwinklichten bekannt. Letzteres nun lässt sich aus Obigen berechnen, wodurch sich denn zugleich die gesuchten Stücke des schiefwinklichten finden.

Berechnung sphärischer schiefwinkllicher Dreyecke.

§. 463. *Lehrsatz. Auch im schiefwinkllichen sphärischen Dreyeck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.*

Beweis. Man lege durch B einen grössten Kreis senkrecht auf AC so entstehen zwey rechtwinklliche Dreyecke ABD und CBD.

Der senkrechte Bogen BD fällt innerhalb des Dreyecks, wenn, wie in Fig. 131. beyde Winkel zugleich spitzig oder stumpf sind, ausserhalb aber, wenn, wie in Fig. 132. der eine C spitzig, der andere A stumpf ist.

Welcher von beyden Fällen aber auch Statt findet, so ist immer

$$\sin. BC : \sin. BD = r : \sin. C$$

$$\sin. BD : \sin. BA = \sin. A : r$$

folglich $\sin. BC : \sin. BA = \sin. A : \sin. C.$

§. 464. *Zusatz.* Durch Hülfe des senkrechten Bogens BD gelangen wir ferner zu folgenden Proportionen, welche zur Auflösung schiefwinkllicher sphärischer Dreyecke dienen.

I. *Die Sinus der Abschnitte auf der Grundlinie verhalten sich wie die Cotangenten der*

anliegenden Winkel. $\sin. CD : \sin. AD = \cot. C : \cot. A.$

Dies erhellet so :

$$\begin{array}{l} \sin. CD : \tan. DB = \cot. C : r \quad (\S. 451. X) \\ \tan. DB : \sin. AD = r : \cot. A \end{array}$$

folglich $\sin. CD : \sin. AD = \cot. C : \cot. A$
 od. auch $\sin. CD : \sin. AD = \tan. A : \tan. C.$

II. Die Cosinus der Abschnitte wie die Cosinus der anliegenden Seiten. $\cos. CD : \cos. AD = \cos. CB : \cos. AB.$

Denn es ist

$$\begin{array}{l} \cos. CD : r = \cos. BC : \cos. BD \quad (\S. 450. III) \\ r : \cos. AD = \cos. BD : \cos. AB \end{array}$$

folglich $\cos. CD : \cos. AD = \cos. BC : \cos. AB.$

III. Die Sinus der Winkel an der Spitze wie die Cosinus der Winkel an der Grundlinie. $\sin. CBD : \sin. ABD = \cos. C : \cos. A.$

Denn es ist

$$\begin{array}{l} \sin. CBD : r = \cos. C : \cos. BD \quad (\S. 450. IV.) \\ r : \sin. ABD = \cos. BD : \cos. A \end{array}$$

folglich $\sin. CBD : \sin. ABD = \cos. C : \cos. A.$

IV. Die Cosinus der Winkel an der Spitze wie die Cotangenten der anliegenden Seiten. $\cos. CBD : \cos. ABD = \cot. BC : \cot. AB.$

Denn es ist

$$\begin{array}{l} \cos.CBD : \text{tang}.BD = \cot.BC : r (\S.451.XI.) \\ \text{tang}.BD : \cos.ABD = \quad \quad \quad r : \cot.AB \end{array}$$

folgl. $\cos.CBD : \cos.ABD = \cot.BC : \cot.AB$
od. auch $\cos.CBD : \cos.ABD = \text{tang}.AB : \text{tang}.BC.$

V. Die Cotangente der halben Summe der Abschnitte zur Tangente ihrer halben Differenz wie die Cotangente der halben Summe der beyden Schenkel zur Tangente ihrer halben Differenz. $\cot. \frac{1}{2}(CD + AD) : \text{tang}. \frac{1}{2}(CD - AD) = \cot. \frac{1}{2}(CB + AB) : \text{tang}. \frac{1}{2}(CB - AB).$

Denn es ist

$$\cos.AD : \cos.CD = \cos.AB : \cos.CB \quad (II.)$$

folglich auch

$$\begin{array}{l} \cos.AD \\ + \cos.CD \end{array} : \begin{array}{l} \cos.AD \\ - \cos.CD \end{array} = \begin{array}{l} \cos.AB \\ + \cos.CB \end{array} : \begin{array}{l} \cos.AB \\ - \cos.CB \end{array} \quad (\text{Arithm.} \S.175.)$$

Man nenne nun Kürze halber das Complement von $AB = \alpha$ und das Complement von $CB = \beta$, so ist $\cos. AB = \sin. \alpha$ und $\cos. CB = \sin. \beta$ und obige Proportion verwandelt sich in diese:

$$\begin{array}{l} \cos.AD \\ + \cos.CD \end{array} : \begin{array}{l} \cos.AD \\ - \cos.CD \end{array} = \begin{array}{l} \sin.\alpha \\ + \sin.\beta \end{array} : \begin{array}{l} \sin.\alpha \\ - \sin.\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Aber es ist auch } \text{tang}. \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \text{tang}. \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ = \begin{array}{l} \sin.\alpha \\ + \sin.\beta \end{array} : \begin{array}{l} \sin.\alpha \\ - \sin.\beta \end{array} \quad (\S.422.) \end{array}$$

$$\text{Also } \left. \begin{array}{l} \cos. AD \\ + \cos. CD \end{array} \right\} : \left[\begin{array}{l} \cos. AD \\ - \cos. CD \end{array} \right] = \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) : \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Aber $\alpha = 90 - AB$ und $\beta = 90 - CB$.

$$\text{Also } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90 - \frac{1}{2}(CB + AB) \text{ und } \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \cot. \frac{1}{2}(CB + AB).$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(CB - AB) \text{ und } \text{tang. } \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \text{tang. } \frac{1}{2}(CB - AB).$$

Statt obiger Proportion kann man also diese setzen:

$$\left. \begin{array}{l} \cos. AD \\ + \cos. CD \end{array} \right\} : \left[\begin{array}{l} \cos. AD \\ - \cos. CD \end{array} \right] = \cot. \frac{1}{2}(CB + AB) : \text{tang. } \frac{1}{2}(CB - AB).$$

$$\text{Aber auch } \left. \begin{array}{l} \cos. AD \\ + \cos. CD \end{array} \right\} : \left[\begin{array}{l} \cos. AD \\ - \cos. CD \end{array} \right] = \cot. \frac{1}{2} (CD + AD) : \text{tang. } \frac{1}{2}(CD - AD) \text{ (§. 423.)}$$

$$\text{Folglich } \cot. \frac{1}{2}(CD + AD) : \text{tang. } \frac{1}{2}(CD - AD) = \cot. \frac{1}{2}(CB + AB) : \text{tang. } \frac{1}{2}(CB - AB).$$

VI. Die Cotangente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie zur Tangente ihrer halben Differenz wie die Tangente der halben Summe der Winkel an der Spitze zur Tangente ihrer halben Differenz. $\cot. \frac{1}{2}(A + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(A - C) = \text{tang. } \frac{1}{2}(CBD + ABD) : \text{tang. } \frac{1}{2}(CBD - ABD).$

Denn es ist $\cos. C : \cos. A = \sin. CBD : \sin. ABD.$ (III.)

Also auch

$$\left. \begin{array}{l} \cos. C \\ + \cos. A \end{array} \right\} : \left. \begin{array}{l} \cos. C \\ - \cos. A \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \sin. CBD \\ + \sin. ABD \end{array} \right\} : \left. \begin{array}{l} \sin. CBD \\ - \sin. ABD \end{array} \right\} \quad (\text{Arithm. §. 175.})$$

$$= \text{tang. } \frac{1}{2}(CBD + ABD) : \text{tang. } \frac{1}{2}(CBD - ABD).$$

(§. 422.)

Aber auch

$$\left. \begin{array}{l} \cos. C \\ + \cos. A \end{array} \right\} : \left. \begin{array}{l} \cos. C \\ - \cos. A \end{array} \right\} = \cot. \frac{1}{2}(A + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(A - C). \quad (\S. 423.)$$

folglich $\cot. \frac{1}{2}(A + C) : \text{tang. } \frac{1}{2}(A - C) = \text{tang. } \frac{1}{2}(CBD + ABC) : \text{tang. } \frac{1}{2}(CBD - ABD).$

§. 465. *Anmerkung.* Ob gleich mit Hülfe des senkrechten Bogens die obigen Proportionen zur Auflösung der schiefwinklichten Dreyecke hinreichen, so wird es doch nicht unnütz seyn, noch folgende Eigenschaften sphärischer Dreyecke zu bemerken.

§. 466. *Lehrsatz.* Wenn man durch die Pole der drey grössten Kreise, die ein sphärisches Dreyeck ABC (Fig. 134.) bilden, drey andere grössten Kreise legt, wodurch ein anderes sphärisches Dreyeck PQS entsteht, so haben diese beyden Dreyecke die Eigenschaft, dass die Winkel des einen den Seiten des andern, und umgekehrt: die Seiten des einen den Winkeln des andern, gleich sind.

Beweis. Nach §. 320. sind die Winkel, unter denen die grössten Kreise gegen einander geneigt sind, den Winkeln ihrer Axen gleich.

Nun ist des grössten Kreises

AB	AC	BC
Pol P	Q	S
halbe Axe PM	QM	SM

Mithin $A = PMQ = PQ$ und $B = PMS = PS$ und $C = QMS = QS$. Also die Winkel des Dreyecks ABC den Seiten des Dreyecks PQS gleich.

Ferner: Wenn durch den Pol P des grössten Kreises AB ein anderer grösster Kreis PQ gelegt wird, so steht AB auf diesen senkrecht (§. 318.) und geht also auch durch dessen Pole. (§. 318.)

Und eben so: wenn durch den Pol Q des grössten Kreises AC ein anderer grösster Kreis PQ gelegt wird, so steht AC auf diesen senkrecht und geht also auch durch dessen Pole. (§. 318.)

Folglich gehen beyde, sowohl AB als AC, durch die Pole des grössten Kreises PQ. Mithin muss A als der Durchschnittspunct beyder ein Pol des Kreises PQ seyn.

Ähnliche Schlüsse gelten für die Puncte B und C.

Es ist also des grössten Kreises $PQ \mid PS \mid QS$

Pol $A \mid B \mid C$

halbe Axe $AM \mid BM \mid CM$

Mithin $P = AMB = AB$ und $Q = AMC = AC$ und $S = BMC = BC$.

§. 467. *Zusatz.* Man kann also ein Dreyeck ABC in ein anderes PQS verwandeln, dessen Seiten den Winkeln des vorigen, und umgekehrt, dessen Winkeln den Seiten des vorigen gleich sind.

Es ist aber hierbey noch zu bemerken, dass eine Seite, zum Beyspiel QS , des andern Dreyecks nach Beschaffenheit der Umstände auch dem Nebenwinkel von C gleich seyn könne, anstatt dem Winkel C selbst gleich zu seyn. Ein solcher Fall ist Fig. 135. dargestellt, wo QS nicht $= C$, sondern mit C zusammen $= 180^\circ$ ist.

Der Bogen nemlich, um welchen die Pole, die an einerley Seite der beyden Kreise liegen, von einander entfernt sind, ist dem spitzen Winkel der beyden Kreise gleich, (so ist $PQ = BAC$, weil P und Q beyde an einerley Seite der Kreise AB und AC liegen.)

Der Bogen aber, um welchen die Pole, die an verschiedenen Seiten der Kreise liegen, von einander entfernt sind, ist dem stumpfen Winkel der beyden Kreise gleich, (so ist QS nicht

$\equiv ACB$, sondern es ist $QS \equiv DCB$, weil Q und S nicht an einerley Seite von AC und BC liegen, Q liegt über AC und BC , hingegen liegt S unter AC und BC .)

Ist nun das Dreyeck ABC so beschaffen, dass sich nicht alle drey Pole an einerley Seite der Kreise befinden können, so tritt der obige Fall ein.

§. 468. *Lehrsatz.* Wenn man die Seiten eines sphärischen Dreyecks ABC (Fig. 136.) verlängert, bis sie Quadranten werden, (nämlich dass $AD \equiv AE \equiv 90^\circ$, auch $BF \equiv BG \equiv 90^\circ$, auch $CH \equiv CI \equiv 90^\circ$) und sodann durch die Endpuncte D, E, F, G, H, I grösste Kreise legt, wodurch ein anderes sphärisches Dreyeck PQS entsteht, so haben diese beyden Dreyecke die Eigenschaft, dass die Seiten des einen und die Winkel des andern, und umgekehrt, die Winkel des einen und die Seiten des andern zusammen 180° ausmachen.

Beweis. Zuvörderst ist klar, dass seyn müsse

$$\begin{array}{ccc} \text{des grössten Kreises} & PQ & | PS & | QS \\ \text{Pol} & A & | B & | C \end{array}$$

Ferner: da A der Pol des grössten Kreises PQ ist, so ist der Bogen AP eines durch A und P gelegten grössten Kreises ein Quadrant,

und da B der Pol des grössten Kreises PS ist, so ist der Bogen BP eines durch B und P

gelegten grössten Kreises ebenfalls ein Quadrant.

Da nun beyde AP und BP Quadranten sind, so ist P der Pol des grössten Kreises AB.

Ähnliche Schlüsse für Q und S angestellt, so ergibt sich, dass seyn müsse

$$\begin{array}{c} \text{des grössten Kreises } AB|AC|BC \\ \text{Pol } P \mid Q \mid S \end{array}$$

Dieses vorausgesetzt ist nun der Winkel $A = DE$

$$\text{ferner } QP = QE + DP - DE = 90^\circ + 90^\circ - DE = 180 - DE = 180 - A$$

folglich $A + QP = 180^\circ$. Völlig eben so erhellet

$$\text{dass } B + PS = 180^\circ \text{ wie auch}$$

$$\text{dass } C + QS = 180^\circ \text{ sey.}$$

$$\text{Umgekehrt ist } P = DG = DA + BG - AB = 90^\circ + 90^\circ - AB = 180^\circ - AB$$

$$\text{folglich } P + AB = 180^\circ$$

$$\text{und so auch } Q + AC = 180^\circ$$

$$\text{wie auch } S + BC = 180^\circ.$$

§. 469. Zusatz. Man kann also ein Dreyeck ABG in ein anderes PQS verwandeln, dessen Seiten die Winkel des ersten, und dessen Winkel die Seiten des ersten zu 180° ergänzen.

Man wird auch die Uebereinstimmung des vorigen Satzes (§. 468.) mit der Bemerkung im Zusatze §. 467. einsehen. Hier Fig. 136.) liegen nemlich die Pole nicht an einerley, sondern an verschiedenen Seiten der Kreise, zum Beyspiel P und Q liegen, jener *unter* AB und AC; dieser *über* AB und AC.

§. 470. *Zusatz.* Die Summe aller drey Winkel in einem sphärischen Dreyeck, ist kleiner als sechs rechte Winkel, und grösser als zwey rechte Winkel. Denn

$$\text{es ist } A + PQ = 2R$$

$$\text{so auch } B + PS = 2R$$

$$\text{und } C + QS = 2R$$

$$\text{folglich } A + B + C + PQ + PS + QS = 6R$$

$$\text{also } A + B + C < 6R$$

$$\text{Ferner ist aber } PQ + PS + QS < 4R$$

(§. 448.)

$$\text{also } A + B + C > 2R$$

§. 471. *Anmerkung.* In einem schiefwinklichten sphärischen Dreyeck können gegeben seyn

1. Drey Seiten (Erste Aufgabe)

2. Drey Winkel (Zweyte Aufgabe)

3. Zwey Seiten und ein Winkel.

a. zwischenliegende (Dritte Aufgabe)

b. gegenüberliegend (Vierte Aufgabe)

4. Zwey Winkel und eine Seite

a. zwischenliegend (Fünfte Aufgabe)

b. gegenüberliegend (Sechste Aufgabe)

§. 472. *Erste Aufgabe.* Gegeben: alle drey Seiten; Gesucht: ein Winkel A.

Auflösung. Durch den senkrechten Bogen BD (Fig. 131, 132.) hat man aus §. 464. V)
 $\cot. \frac{1}{2} (AB + BC) : \tan. \frac{1}{2} (BC - AB) = \cot. \frac{1}{2} (AD + DC) : \tan. \frac{1}{2} (DC - AD)$ wodurch also der Unterschied der Abschnitte und nach Arithm. §. 100. ein Abschnitt AD bekannt wird.

Sodann ist im rechtwinklichten Dreyeck ABD
 $\cot. AD : \cot. AB = r : \cos. A.$ (§. 450. V)

Andere Auflösung. Man kann auch eine Formel für den Sinus $\frac{1}{2}A$ suchen, wo dieser bloss durch die Sinus der drey Seiten ausgedrückt wird; und zwar folgendermaassen:

Es sey wie in der ebenen Trigonometrie $BC = a$,
 $AC = b$, $AB = c$

Nun ist $\cos. CD = \frac{\cos. a \cos. AD}{\cos. c}$ (§. 464. II)

Auch $\cos. CD = \cos. (b - AD) = \cos. b \cos. AD + \sin. b \sin. AD$ (§. 395.)

Beydes gleich gesetzt, durch $\cos. AD$ dividirt, und dabey bemerkt, dass $\frac{\sin. AD}{\cos. AD} = \tan. AD$ ist, so erhält man

$$\tan. AD = \frac{\cos. a - \cos. c \cos. b}{\cos. c \cdot \sin. b}$$

Aber auch $\tan. AD = \cos. A \cdot \tan. c$ (§. 45 r VIII.) $= \frac{\cos. A \sin. c}{\cos. c}$

Beydes gleich gesetzt, und mit $\cos. c$ multiplicirt, das heisst $\cos. c$ aus den Nennern weggelassen, sodann mit $\sin. c$ dividirt, so erhält man eine Formel für $\cos. A$

$$\text{Nemlich } \cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

Man kann hieraus noch eine andere Formel für $\cos. A$ herleiten, die wir aber übergehen, und nur aus obigen eine bequeme Formel für $\sin. \frac{1}{2}A$ suchen.

$$\text{Es ist aber } \sin. \frac{1}{2}A = r \left(\frac{1 - \cos. A}{2} \right) \text{ §. 399.}$$

$$\begin{aligned} \text{Also } 2 \sin. \frac{1}{2}A^2 &= 1 - \cos. A. \\ &= \frac{\sin. b \cdot \sin. c - \cos. a + \cos. c \cdot \cos. b}{\sin. b \sin. c} \\ &= \frac{\cos. (b - c) - \cos. a}{\sin. b \sin. c} \quad (\text{§. 395.}) \end{aligned}$$

Der Zähler ist ein Unterschied zweyer Cosinusse, und kann nach §. 400. als ein Product ausgedrückt werden, welches wegen der Berechnung mit Logarithmen vorzuziehen ist.

Dort (§. 400.) war

$$\cos. \delta - \cos. \sigma = 2 \sin. \frac{1}{2}(\sigma + \delta) \cdot \sin. \frac{1}{2}(\sigma - \delta)$$

So auch hier

$$\cos. (b - c) - \cos. a = 2 \sin. \frac{1}{2}(a + b - c) \sin. \frac{1}{2}(a - b + c).$$

Also verwandelt sich obige Gleichung in folgende

$$2 \sin. \frac{1}{2} A^2 = \frac{2 \cdot \sin. \frac{1}{2}(a + b - c) \sin. \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin. b \cdot \sin. c}$$

Hieraus ergibt sich sodann die gesuchte Formel

$$\sin. \frac{1}{2} A = r \left(\frac{\sin. \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot \sin. \frac{1}{2}(a - b + c)}{\sin. b \cdot \sin. c} \right)$$

für den Halbmesser $= 1$, wodurch denn $\frac{1}{2}A$ mithin A bekannt wird.

Diese Formel in Worte zu übersetzen, oder auch die Proportion hinzuschreiben, wo $\sin. \frac{1}{2} A^2$ im letzten Gliede steht, wird hier nicht nöthig seyn.

Dass die beyden andern Winkel durch eben eine solche Formel gefunden werden, ist von

selbst klar. Uebrigens versteht sich, dass $\frac{1}{2} A$ spitzig seyn müsse, da $A < 180$ ist.

§. 473. *Zweyte Aufgabe.* Gegeben: alle drey Winkel. Gesucht: eine Seite BC.

Auflösung. Durch den senkrechten Bogen BD hat man aus §. 464. VI. $\cot. \frac{1}{2} (A + C) : \tan. \frac{1}{2} (A - C) = \tan \frac{1}{2} (CBD + ABD) : \tan \frac{1}{2} (CBD - ABD)$. Durch Summe und Unterschied der Winkel an der Spitze ist jeder dieser Winkel also CBD bekannt; und man hat sodann

$$r : \cot. C = \cot. CBD : \cos. CB \quad (\S. 451. XII.)$$

Andere Auflösung. Im Dreyeck PQS Fig. 136. ist $\cos. S = \frac{\cos. PQ - \cos. PS \cdot \cos. QS}{\sin. PS \cdot \sin. QS}$

welches eben so wie im vorigen §. 472. der Ausdruck für $\cos. A$ gefunden wird.

Da nun die Winkel und Seiten des Dreyecks ABC zu 180° ergänzen, so folgt, dass seyn müsse

$$\cos. S = - \cos. a$$

$$\cos. PQ = - \cos. A$$

$$\cos. PS = - \cos. B$$

$$\cos. QS = - \cos. C$$

$$\sin. PS = + \sin. B$$

$$\sin. QS = + \sin. C$$

$$\text{Also } \cos. a = \frac{\cos. A - \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$$

$$\text{Oder } \cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C}$$

Um aber einen Ausdruck zu finden, der für die Berechnung mit Logarithmen bequemer ist, hat man

$$\cos. \frac{1}{2}a = r \left(\frac{1 + \cos. a}{2} \right) (\S. 399.)$$

$$\begin{aligned} \text{Also } 2 \cos. \frac{1}{2}a &= 1 + \cos. a \\ &= \frac{\sin. B \sin. C + \cos. A + \cos. B \cos. C}{\sin. B \sin. C} \\ &= \frac{\cos. (B - C) + \cos. A}{\sin. B \sin. C} (\S. 395.) \end{aligned}$$

Der Zähler ist hier eine Summe zweyer Cosinus, und lässt sich folglich aus §. 400. durch ein Product ausdrücken, welches zur Berechnung mit Logarithmen bequemer ist. Dort §. 400. war

$$\cos. \sigma + \cos. \delta = 2 \cos. \frac{1}{2}(\sigma + \delta) \cos. \frac{1}{2}(\sigma - \delta)$$

Wenn nun hier $A = \sigma$ und $B - C = \delta$ ist, so hat man den Zähler des obigen Ausdrucks

$$\begin{aligned} \cos. (B - C) + \cos. A &= 2 \cos. \frac{1}{2}(A + B - C) \\ &\cos. \frac{1}{2}(A - B + C) \end{aligned}$$

folglich

$$\frac{2 \cdot \cos. \frac{1}{2} a^2}{2 \cos. \frac{1}{2} (A + B - C) \cos. \frac{1}{2} (A - B + C)} = \frac{1}{\sin. B \sin. C}$$

Hieraus ergibt sich sodann die gesuchte Formel

$$\cos. \frac{1}{2} a = r \left(\frac{\cos. \frac{1}{2} (A + B - C) \cos. \frac{1}{2} (A - B + C)}{\sin. C \sin. C} \right)$$

für den Halbmesser $= 1$ wodurch denn $\frac{1}{2}a$ mit-
hin a gefunden ist. Auch hier ist $\frac{1}{2}a < 90^\circ$ zu
nehmen, weil $a < 180^\circ$ ist.

Dass jede andere Seite auf eben die Art ge-
funden werde, erhellet von selbst.

§. 474. Dritte Aufgabe. Gegeben: zwey
Seiten AB und AC nebst dem zwischenliegen-
den Winkel A ; gesucht: 1) Winkel C , 2)
Winkel B , 3) Seite BC . (Fig. 131.)

Auflösung. 1) $r, \cos. A = \text{tang. } AB : \text{tang. } AD$. (§. 451. VIII.)

Durch AD ist auch $CD = AC - AD$ be-
kannt. Sodann ist

$$\sin. CD : \sin. AD = \text{tang. } A : \text{tang. } C \text{ (§. 464. I.)}$$

2) Es ist von selbst klar, dass der Winkel
 B auf ähnliche Art gefunden werde, wenn man
von C einen senkrechten Bogen auf AB zieht.
Uebrigens kann er auch, wenn C bekannt ist,

durch folgende Proportion gefunden werden,
 $\sin. AB : \sin. AC = \sin. C : \sin. B.$ (§. 463.)

3) Nachdem AD und CD wie zuvor gefunden worden, hat man $\cos. AD : \cos. CD = \cos. AB : \cos. BC$ (§. 464. II.)

§. 475. *Vierte Aufgabe.* Gegeben: zwey Seiten AB und BC nebst dem Winkel A; Gesucht: 1) Winkel B. 2) Winkel C. 3) Seite AC.

Auflösung. 1) $r : \tan. A = \cos. AB : \cot. ABD$
 (§. 450. VI.)

und $\tan. BC : \tan. AB = \cos. ABD : \cos. CBD$
 (§. 464. IV.)

wodurch also $B = ABD + CBD$ gefunden ist.

2) Der andere Winkel C unmittelbar durch die Proportion

$$\sin. BC : \sin. AB = \sin. A : \sin. C.$$

3) Nachdem AD wie §. 474. 1) gefunden ist, so hat man

$$\cos. AB : \cos. BC = \cos. AD : \cos. DC$$

wodurch denn $AC = DC + AD$ (Fig. 131.) gefunden wird.

§. 476. *Fünfte Aufgabe.* Gegeben: zwey Winkel A und B, nebst der dazwischen liegenden Seite AB. Gesucht: 1) Seite BC, 2) Seite AC, 3) Winkel C.

Auflösung. 1) $r : \text{tang. } A = \cos. AB : \cot. ABD$ (§. 450. VI.) Durch ABD ist auch CBD bekannt, nemlich $CBD = B - ABD$. Sodann hat man

$$\cos. CBD : \cos. ABD = \text{tang. } AB : \text{tang. } BC. \quad (\S. 464. IV.)$$

2) Die andere Seite AC wird begreiflich auf eben die Art gefunden, wenn man von A auf BC einen senkrechten Bogen zieht. Uebrigens kann sie auch, wenn die eine Seite BC schon bekannt ist, durch die Proportion gefunden werden

$$\sin. A : \sin. B = \sin. BC : \sin. AC \quad (\S. 463.)$$

3) Nachdem ABD und CBD, wie zuvor gefunden worden, hat man

$$\sin. ABD : \sin. CBD = \cos. A : \cos. C \quad (\S. 464. III.)$$

§. 477. *Sechste Aufgabe.* Gegeben: zwey Winkel A und C nebst der Seite AB. Gesucht: 1) Seite AC, 2) Seite BC, 3) Winkel B.

Auflösung. 1) Nachdem AD wie (§. 474 1) gefunden worden, hat man

$$\text{tang. } C : \text{tang. } A = \sin. AD : \sin. CD \quad (\S. 464. I.) \text{ wodurch denn } AC = AD + CD \text{ gefunden ist.}$$

2) Die andere Seite BC findet sich unmittelbar durch die Proportion

$$\sin. C : \sin. A = \sin. A = \sin. AB : \sin. BC.$$

3) Nachdem ABD wie (§. 476. 1) gefunden worden, so hat man

$$\cos. A : \cos. C = \sin. ABD : \sin. CBD \text{ (§. 464. III) wodurch denn } B = ABD + CBD \text{ gefunden ist.}$$

§. 478. *Anmerkung.* In diesen Auflösungen ist ein Dreyeck angenommen worden, wie Fig. 131. darstellt, wo der senkrechte Bogen BD *innerhalb* des Dreyecks fällt. Ob er aber *innerhalb* oder *ausserhalb* falle, ob das Gesuchte kleiner oder grösser als 90° sey; oder ob es zweydeutig bleibe, lässt sich aus den obigen Gründen (§. 459. 460.) beurtheilen. Die ausführliche Auseinandersetzung kann bey jedem Falle leicht mündlich hinzugefüget werden.

Aehnliche analytische Auflösungen, wie zur ersten und zweyten Aufgabe (§. 472. 473,) gegeben sind, finden auch bey den übrigen Statt, worüber man weiter in *Karstens* Lehrbegrif, (zweyter Theil erste Abtheilung, XXIV. Abschnitt) nachlesen kann.

Fig. 1.

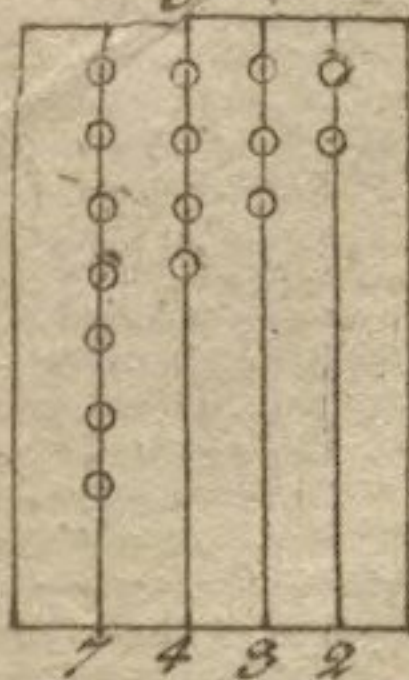


Fig. 2.

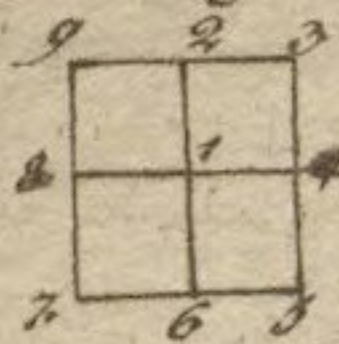


Fig. 3.

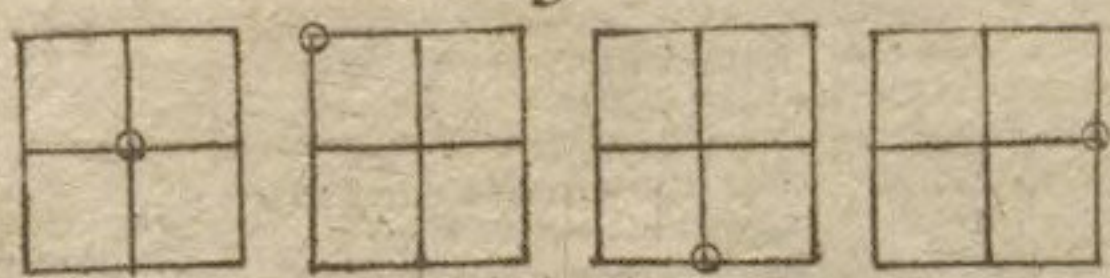


Fig. 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 5.

1								
2	4							
3	6	9						
4	8	12	16					
5	10	15	20	25				
6	12	18	24	30	36			
7	14	21	28	35	42	49		
8	16	24	32	40	48	56	64	
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 6.

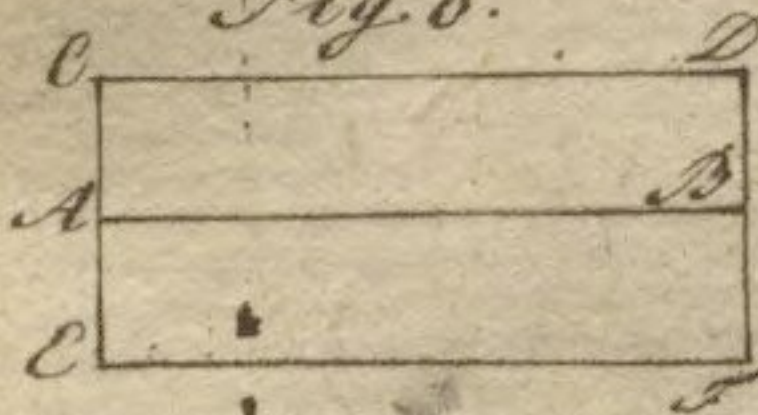


Fig. 7.

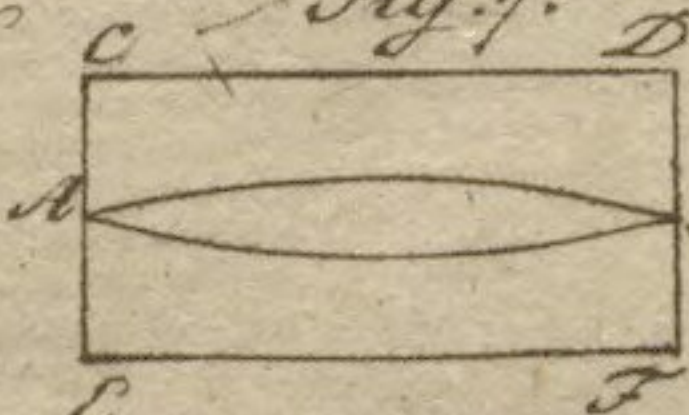


Fig. 8.

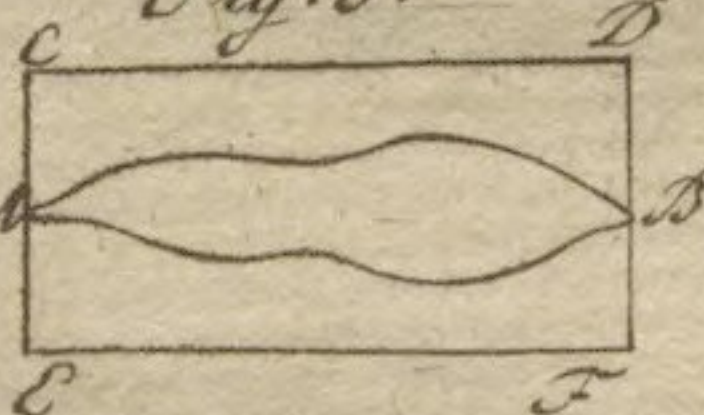


Fig. 9.

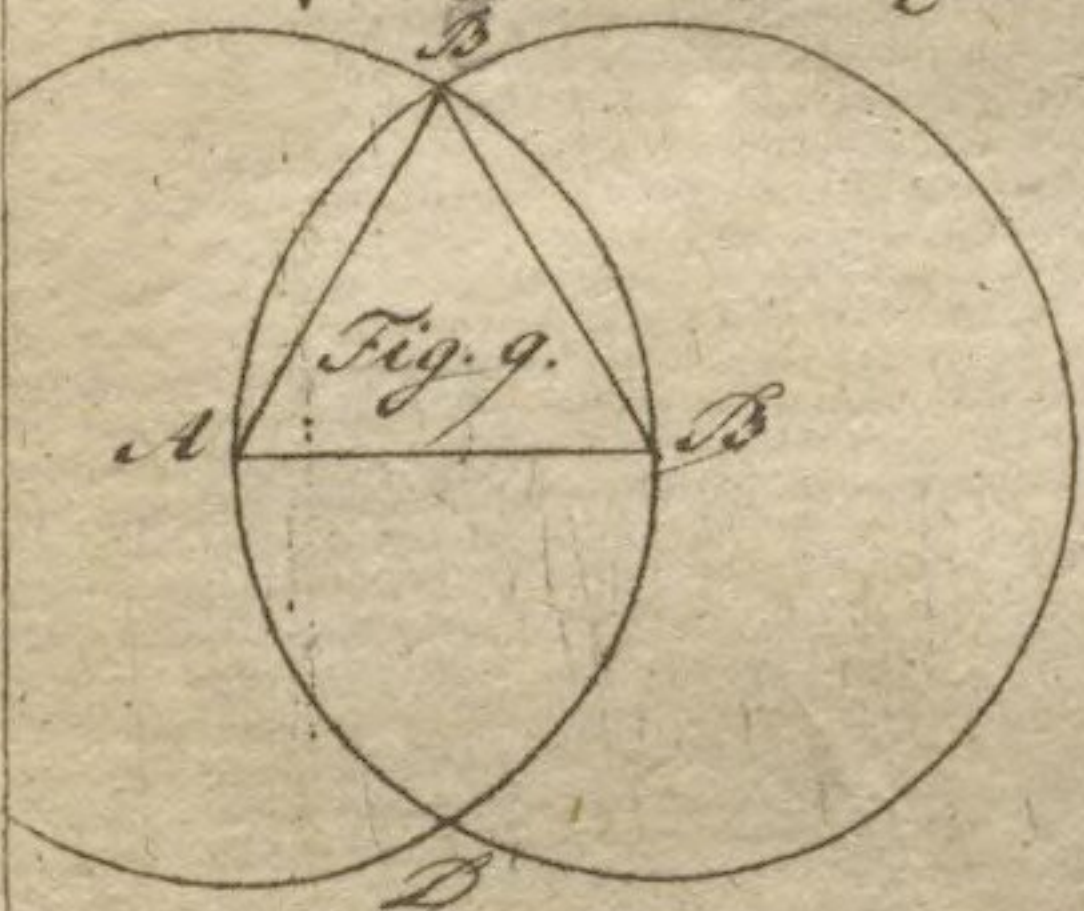


Fig. 10.

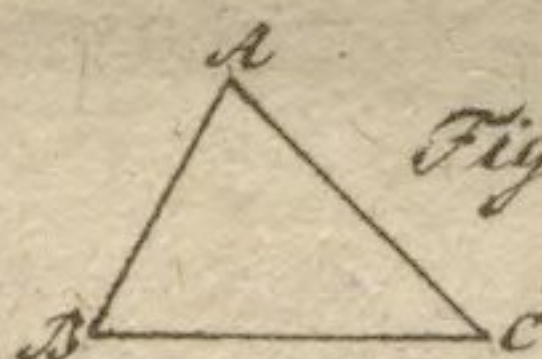


Fig. 11.

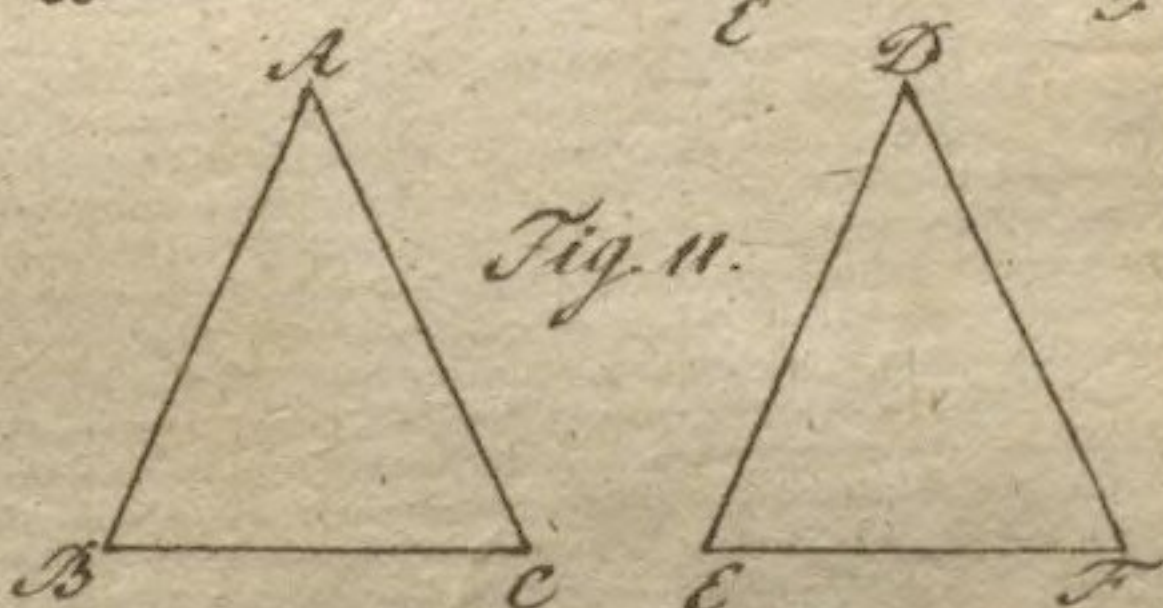


Fig. 12.

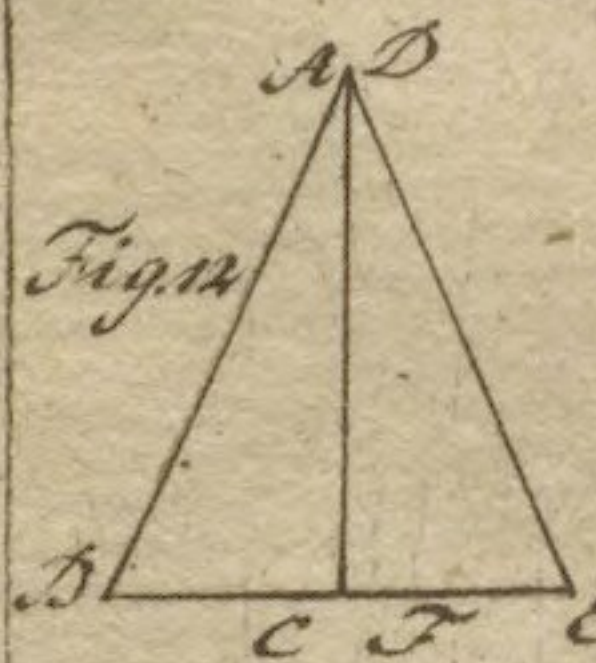


Fig. 13.

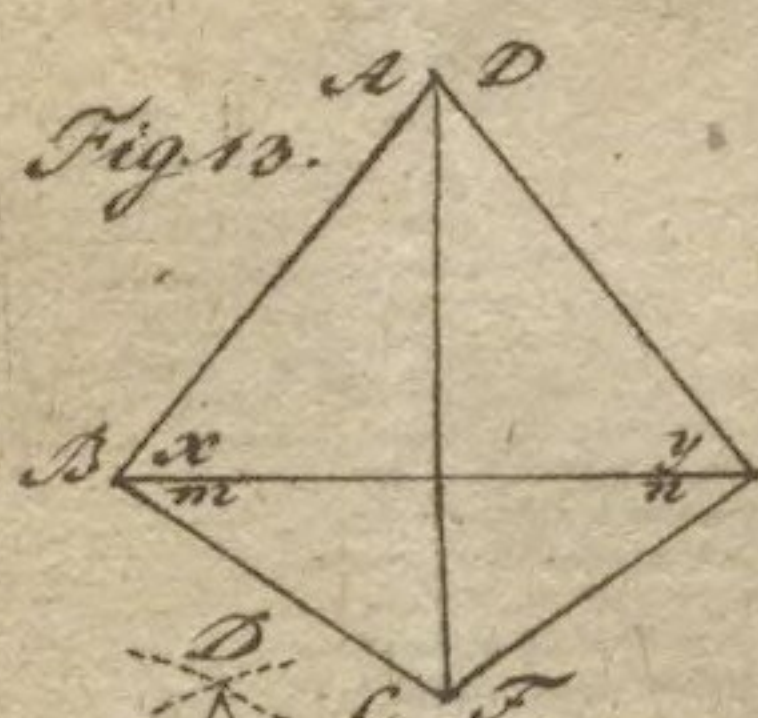


Fig. 14.

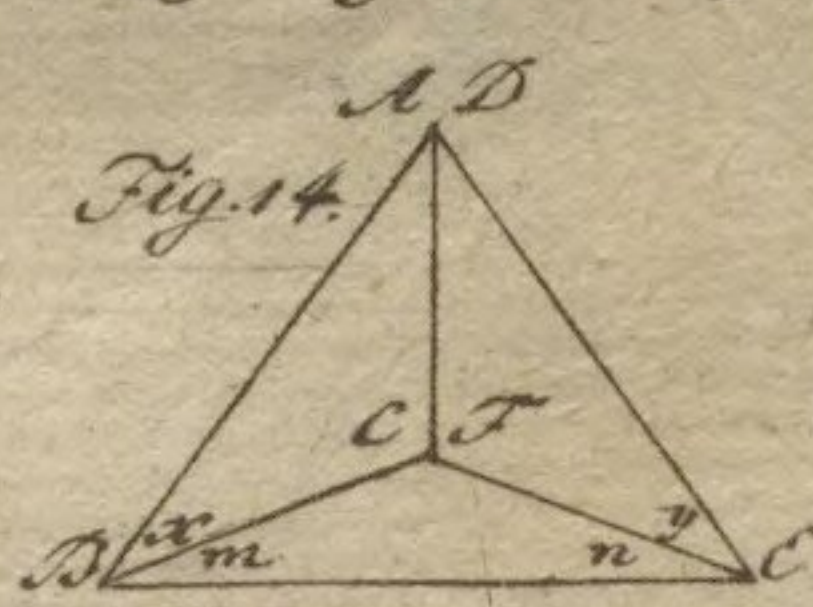


Fig. 15.

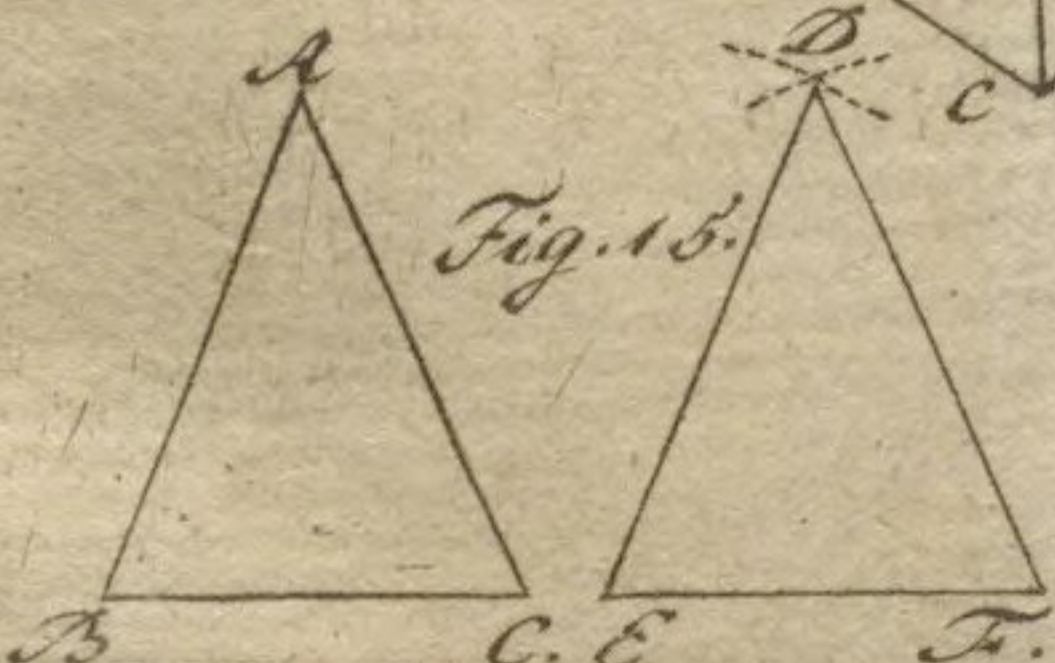
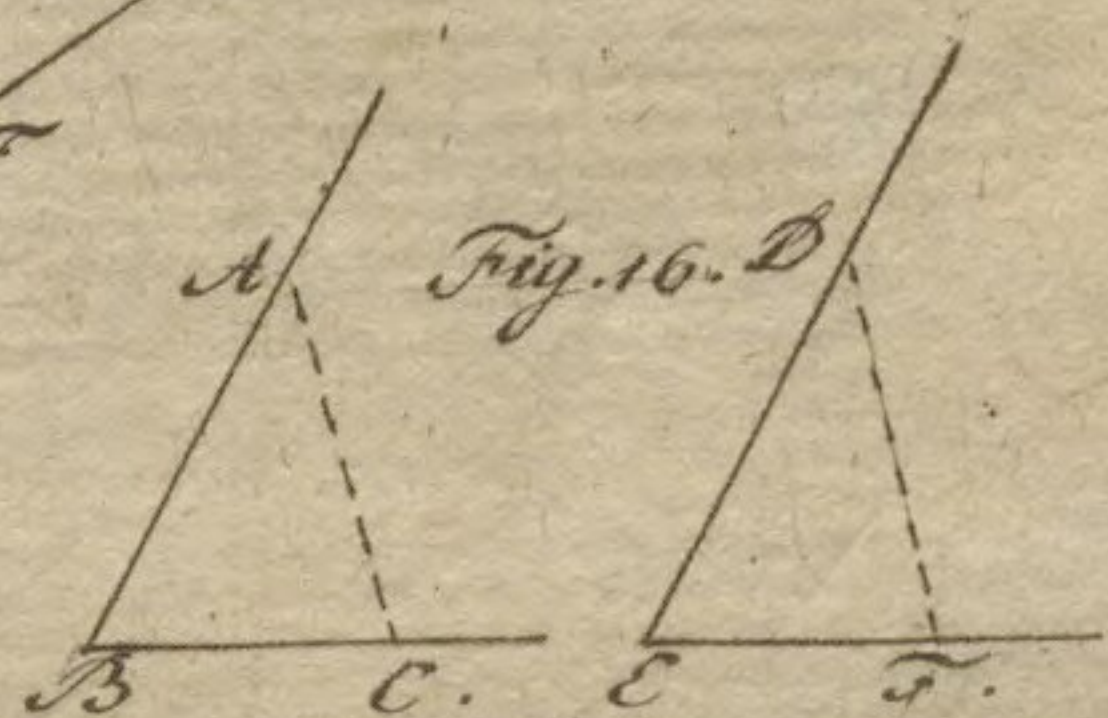


Fig. 16.





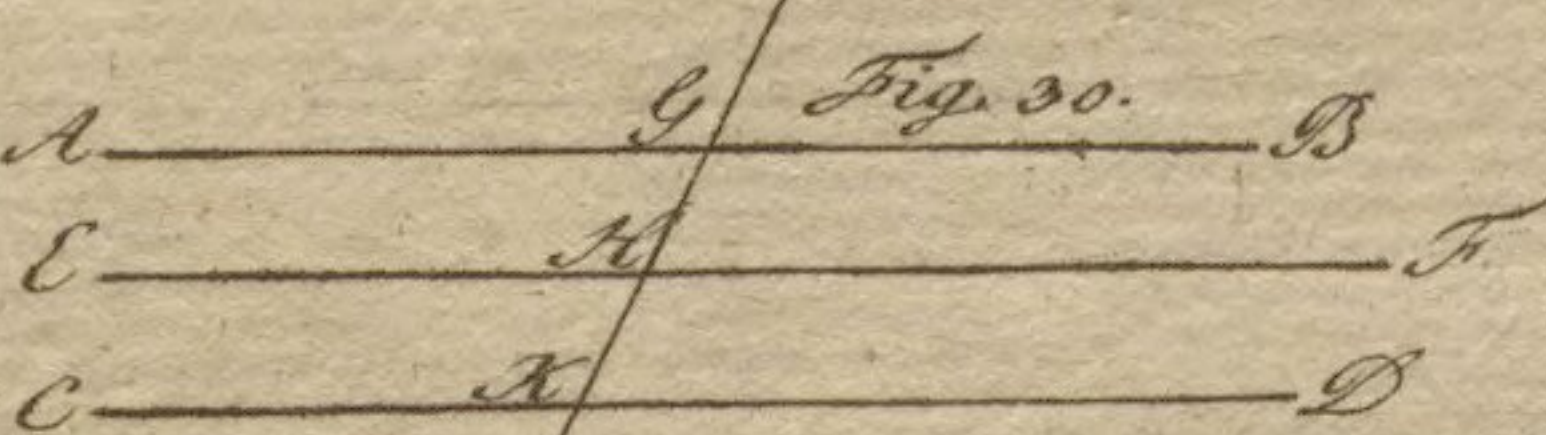
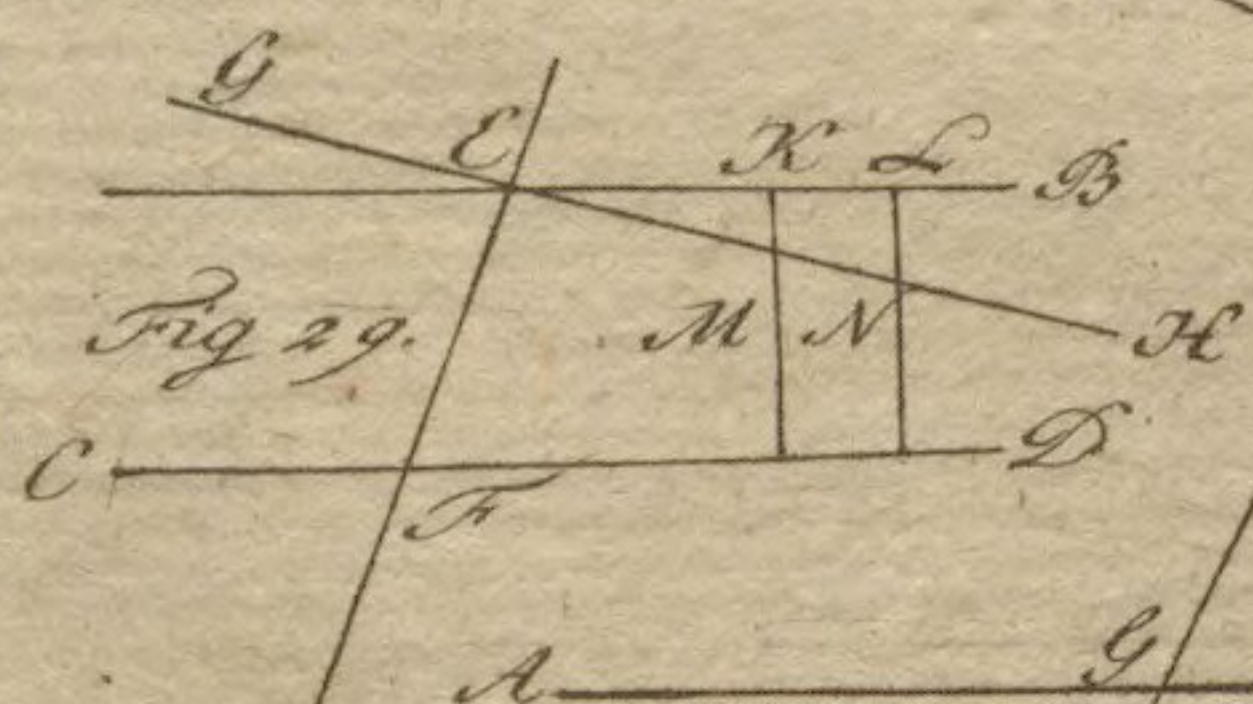
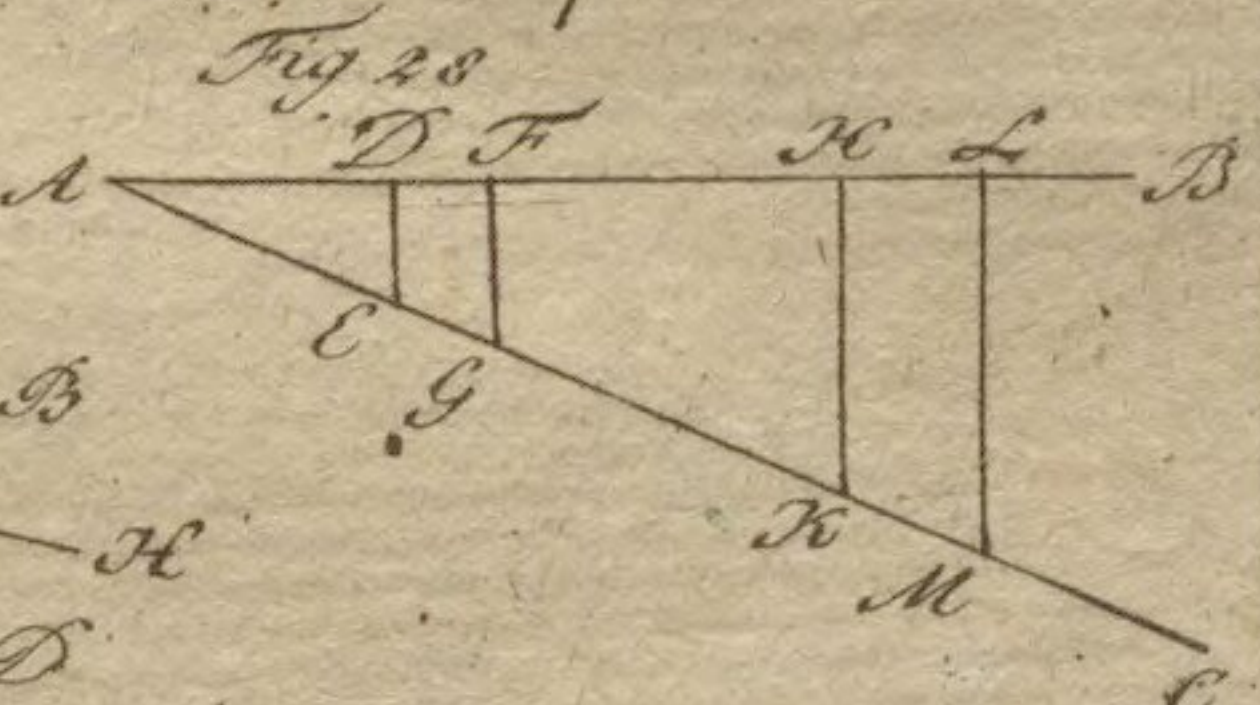
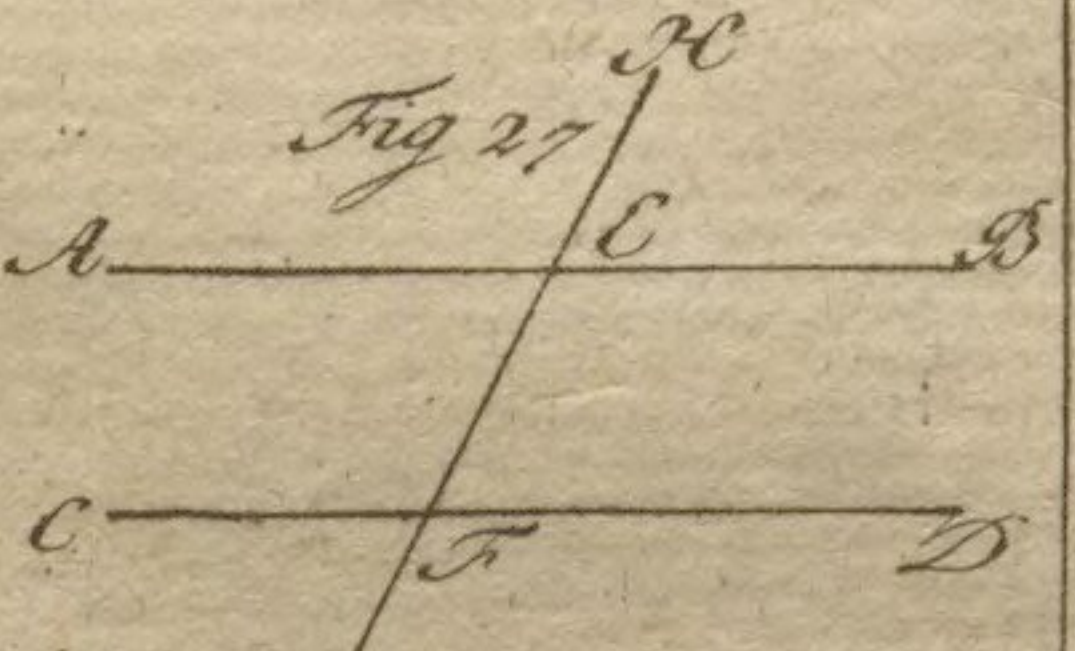
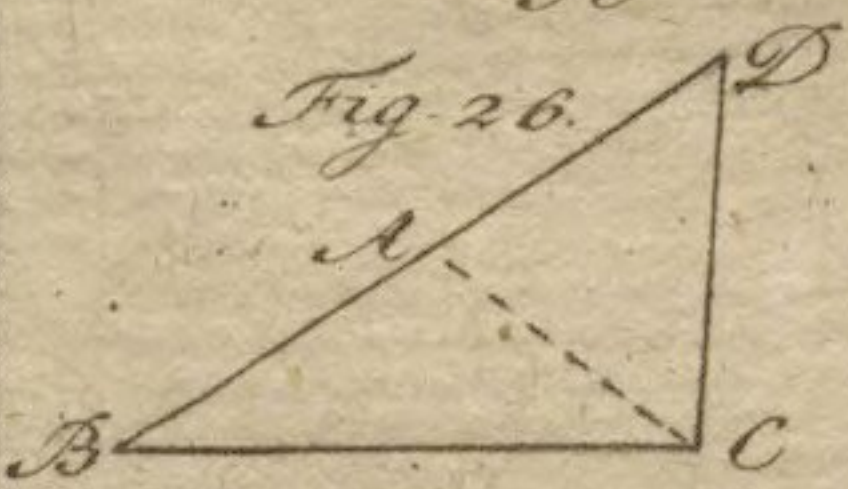
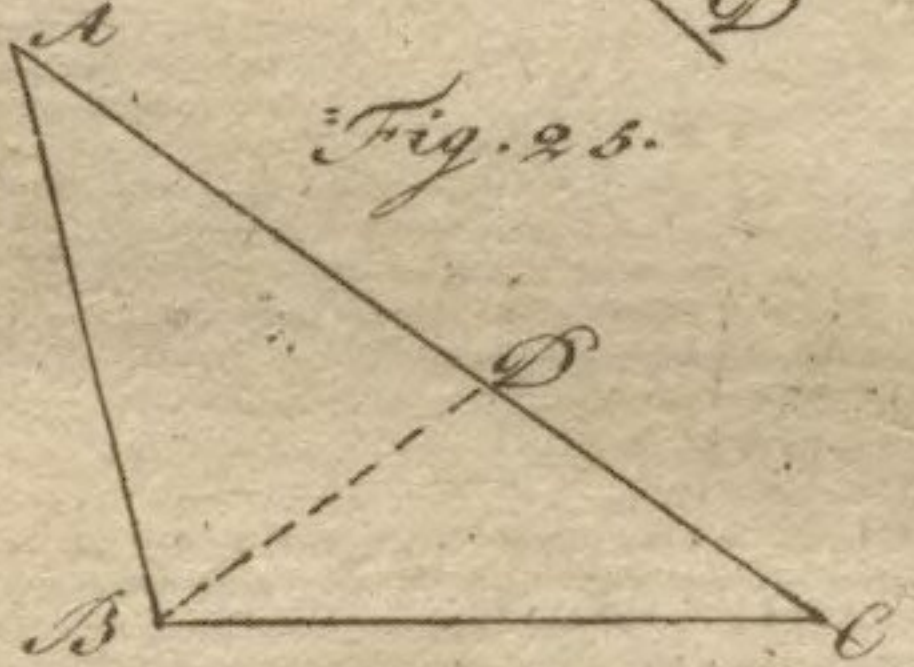
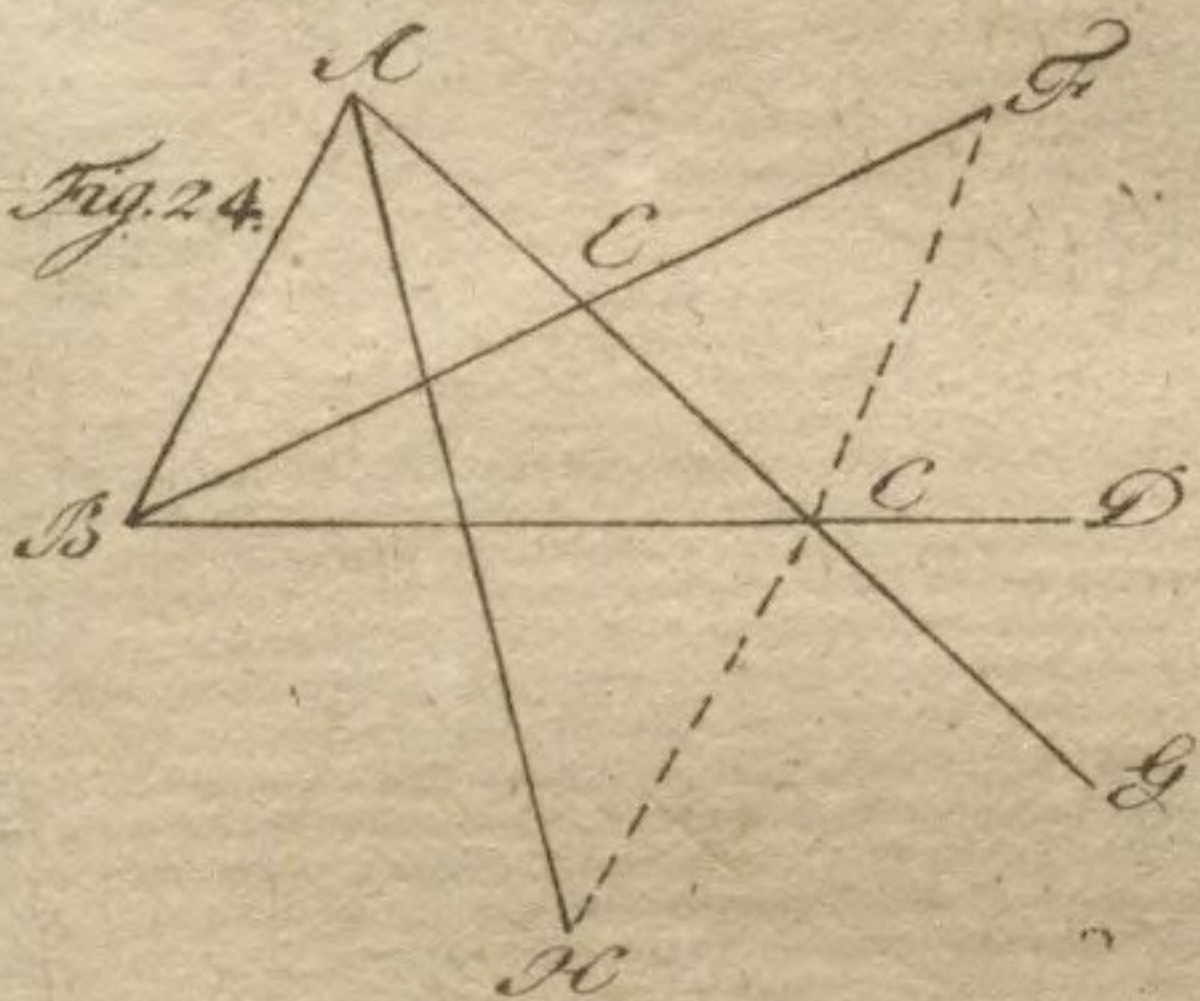
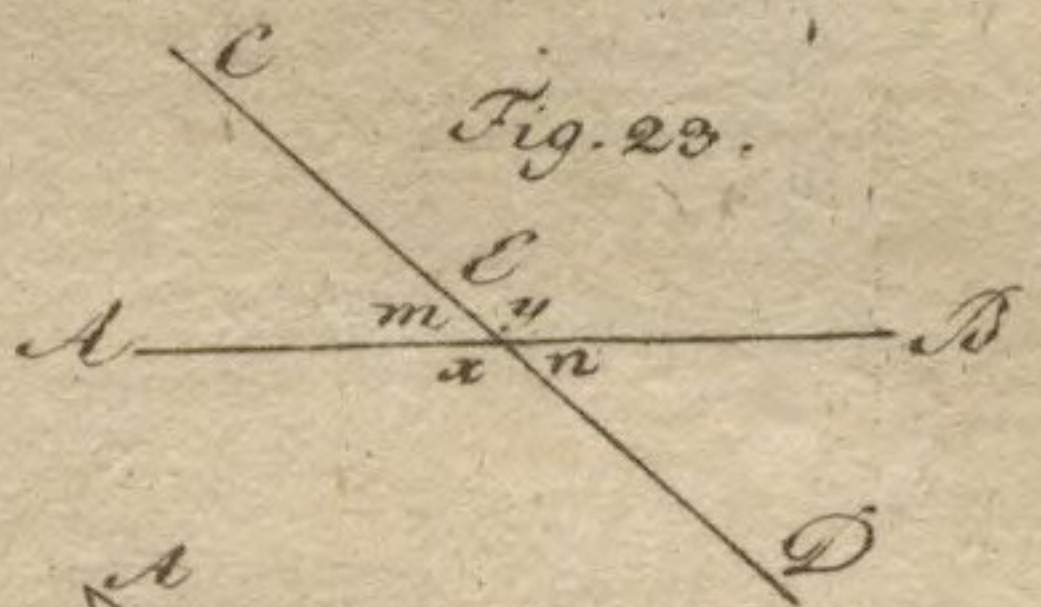
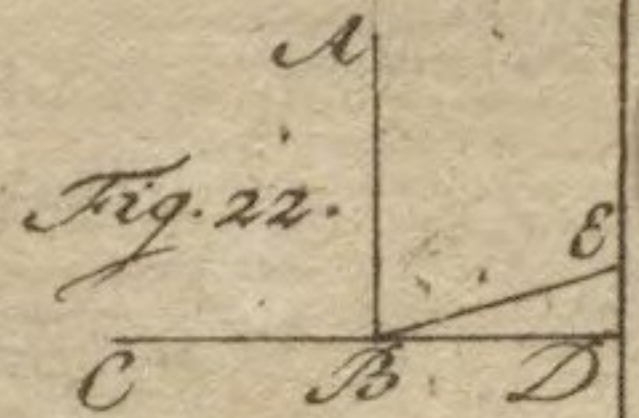
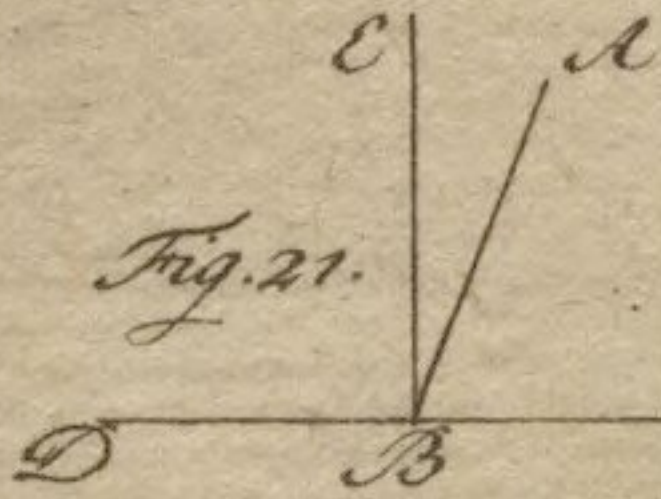
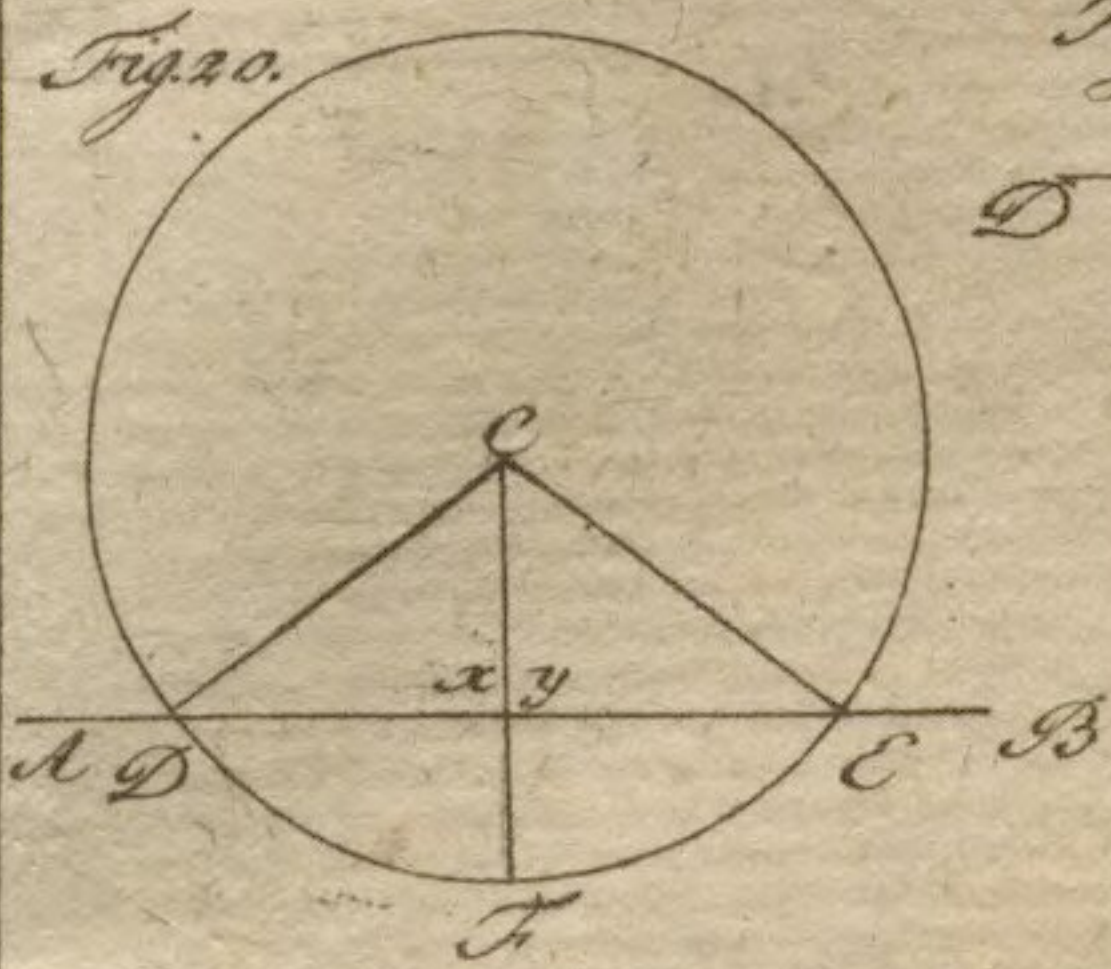
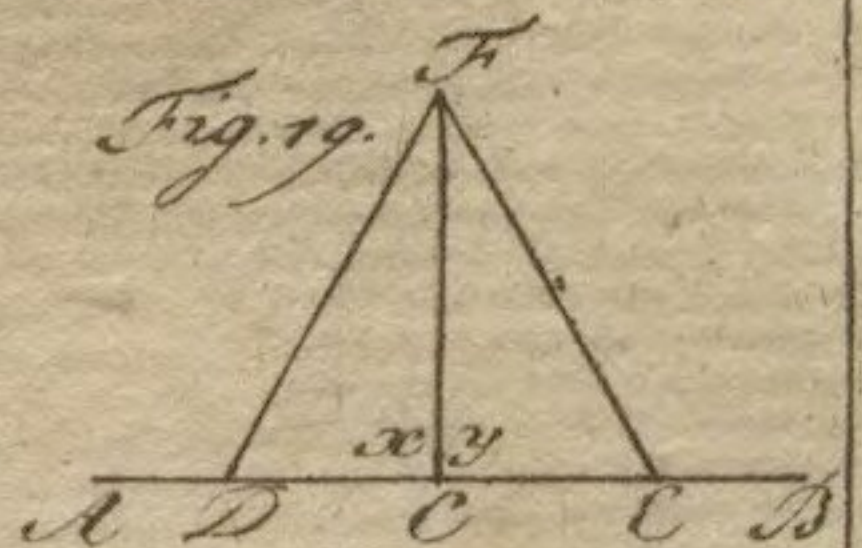
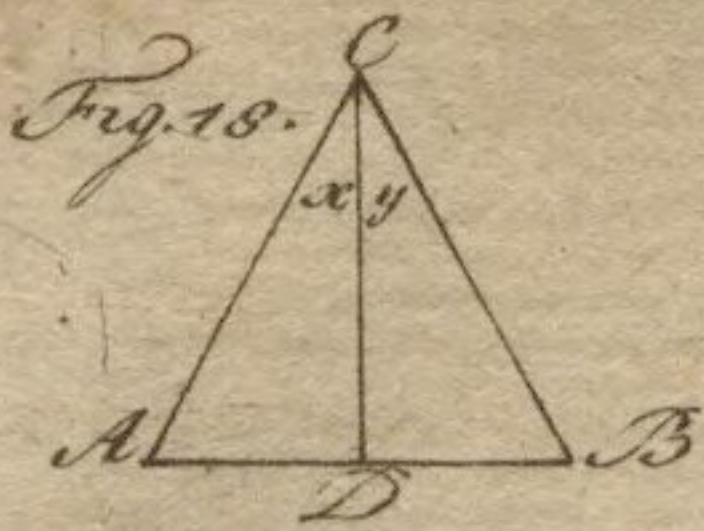
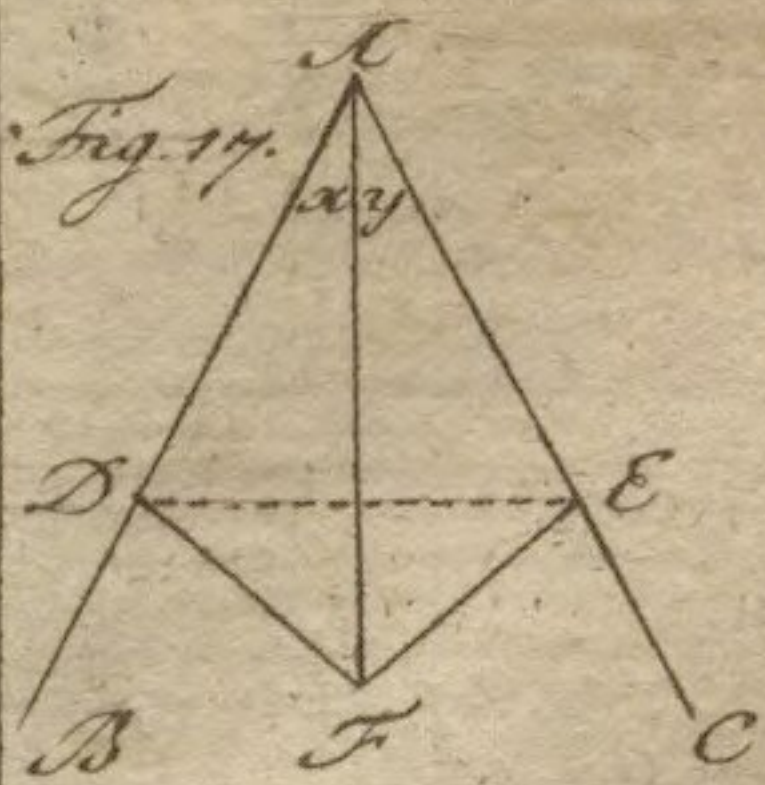


Fig. 31.

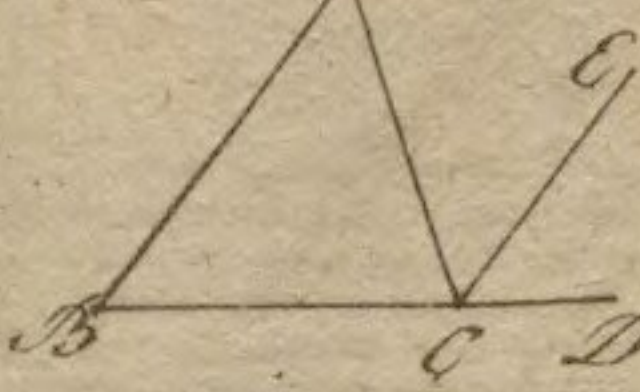


Fig. 32.

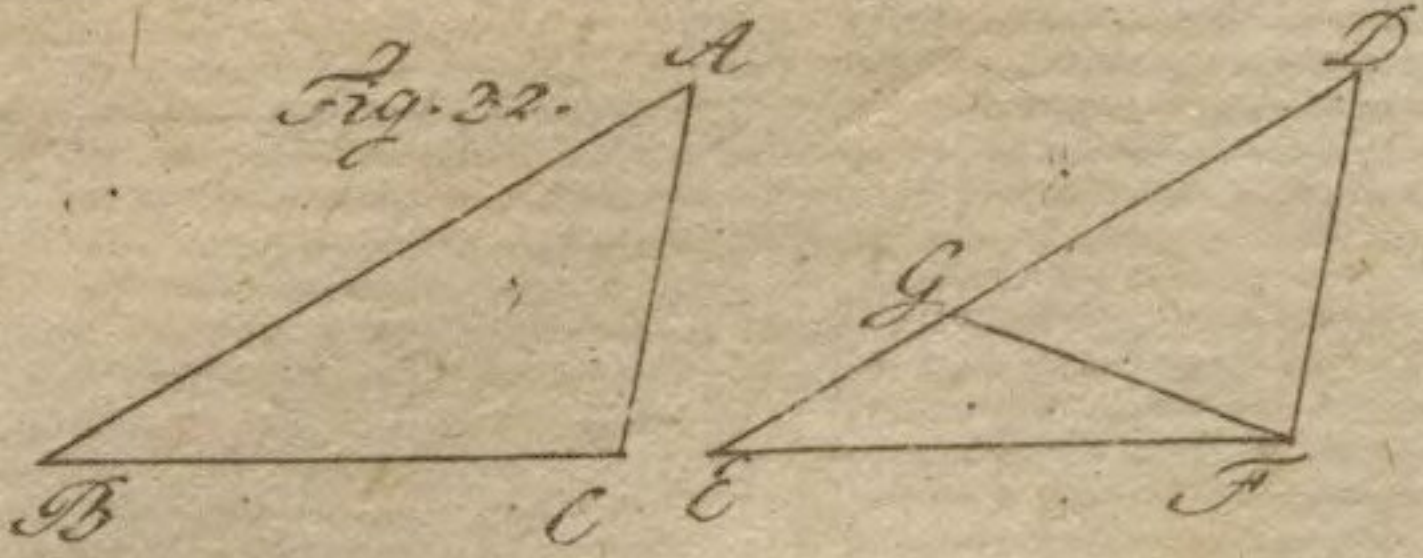


Fig. 33.

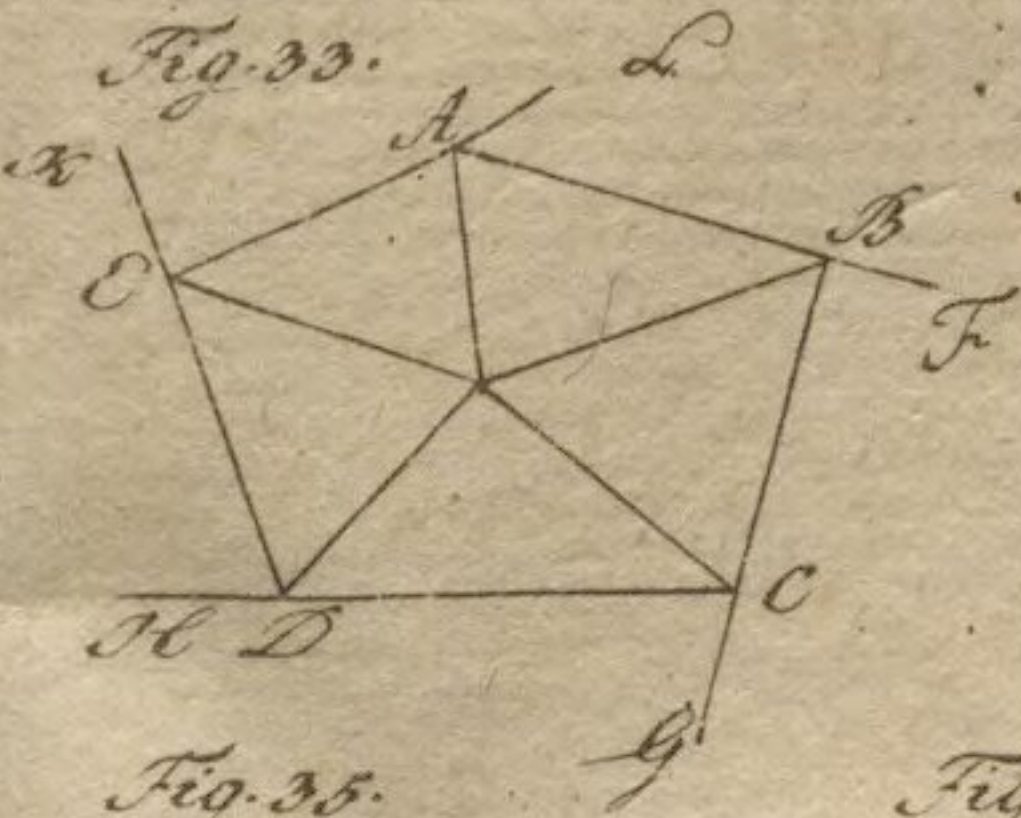


Fig. 34.

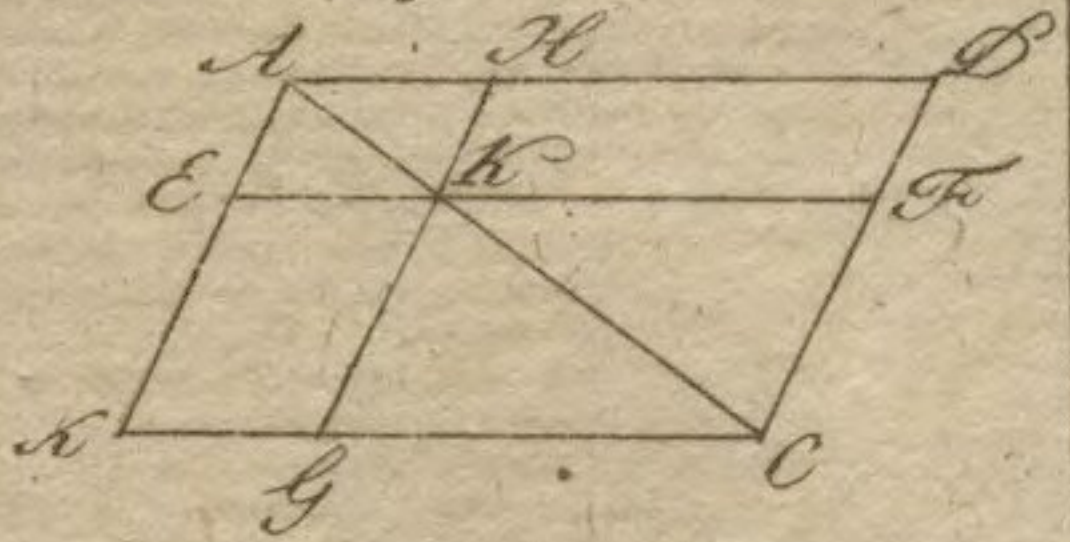


Fig. 35.

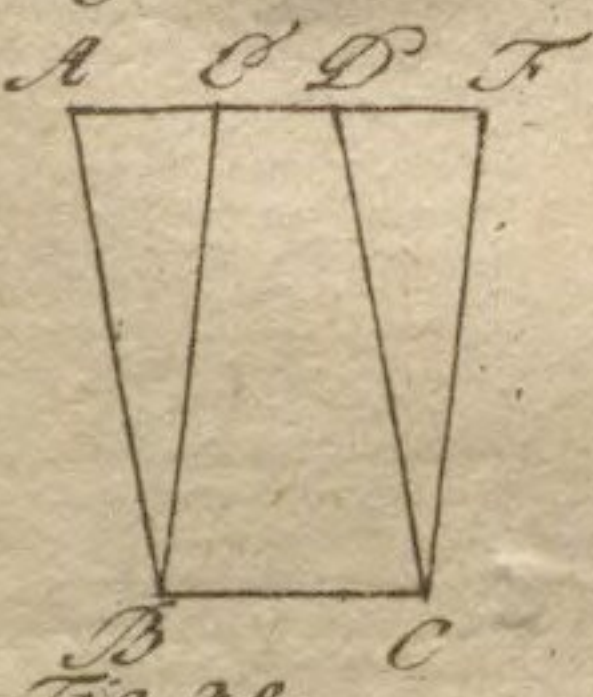


Fig. 36.

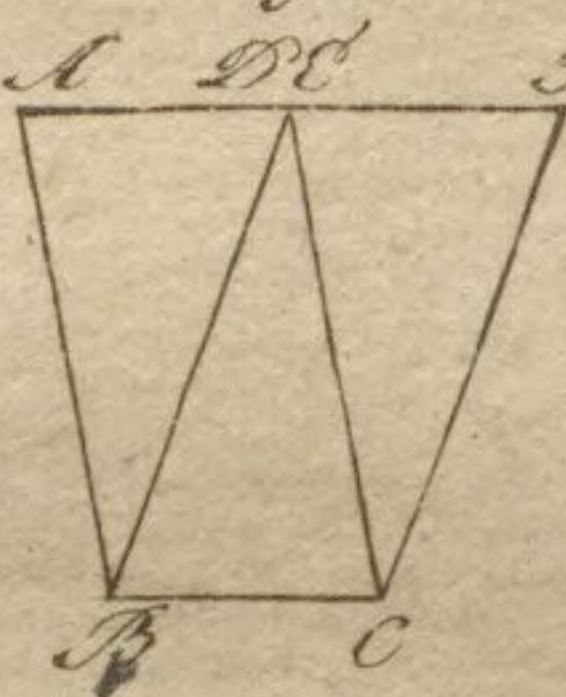


Fig. 37.

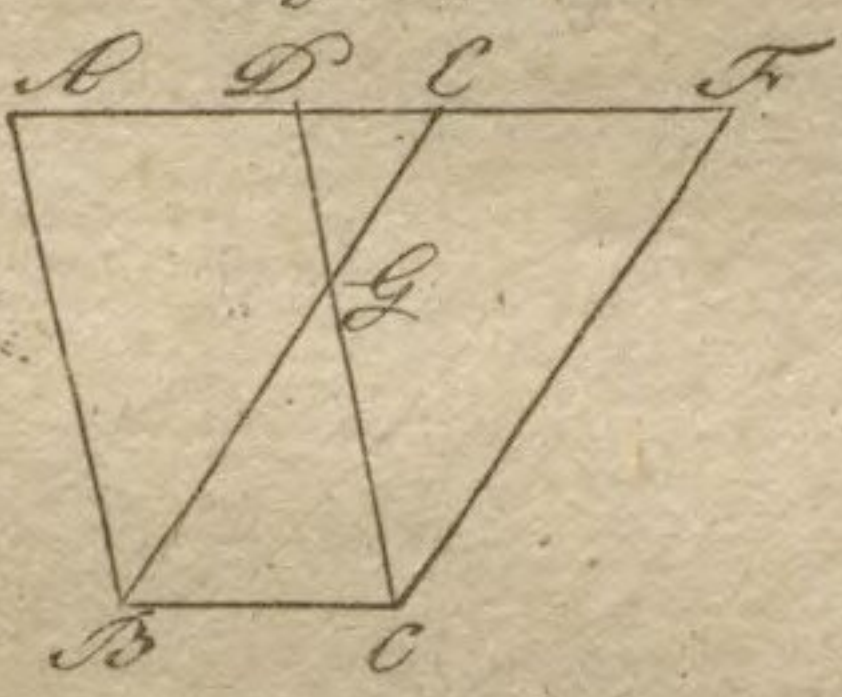


Fig. 38.

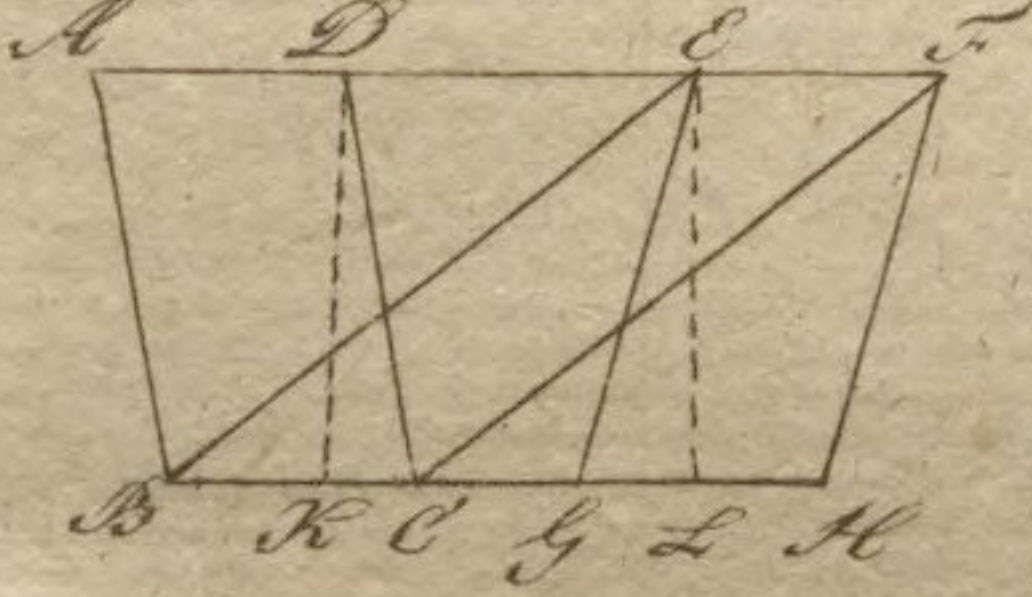


Fig. 39.

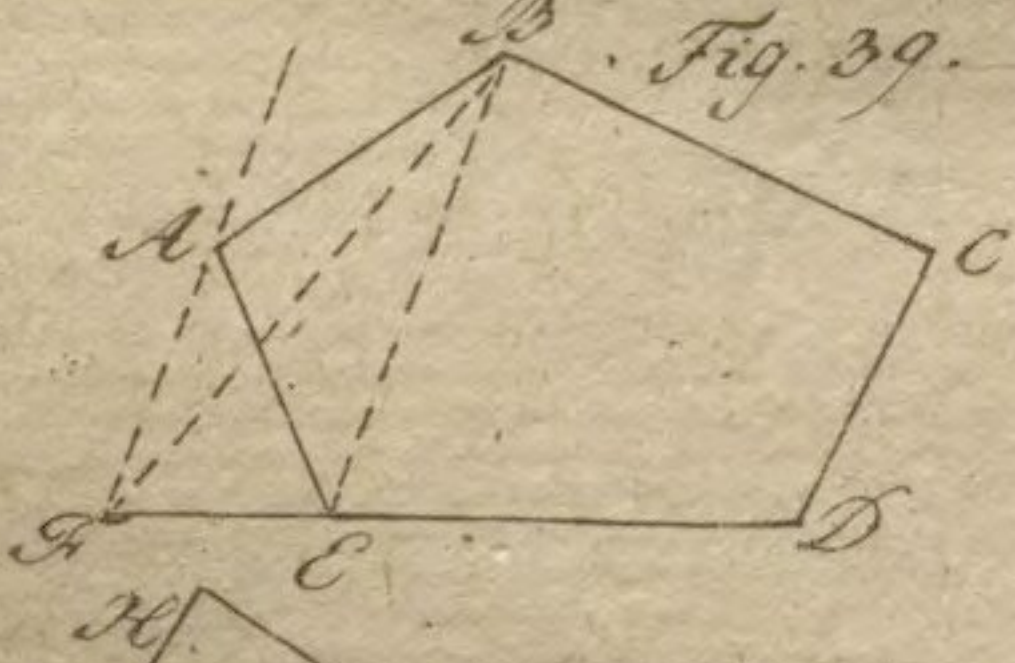


Fig. 40.

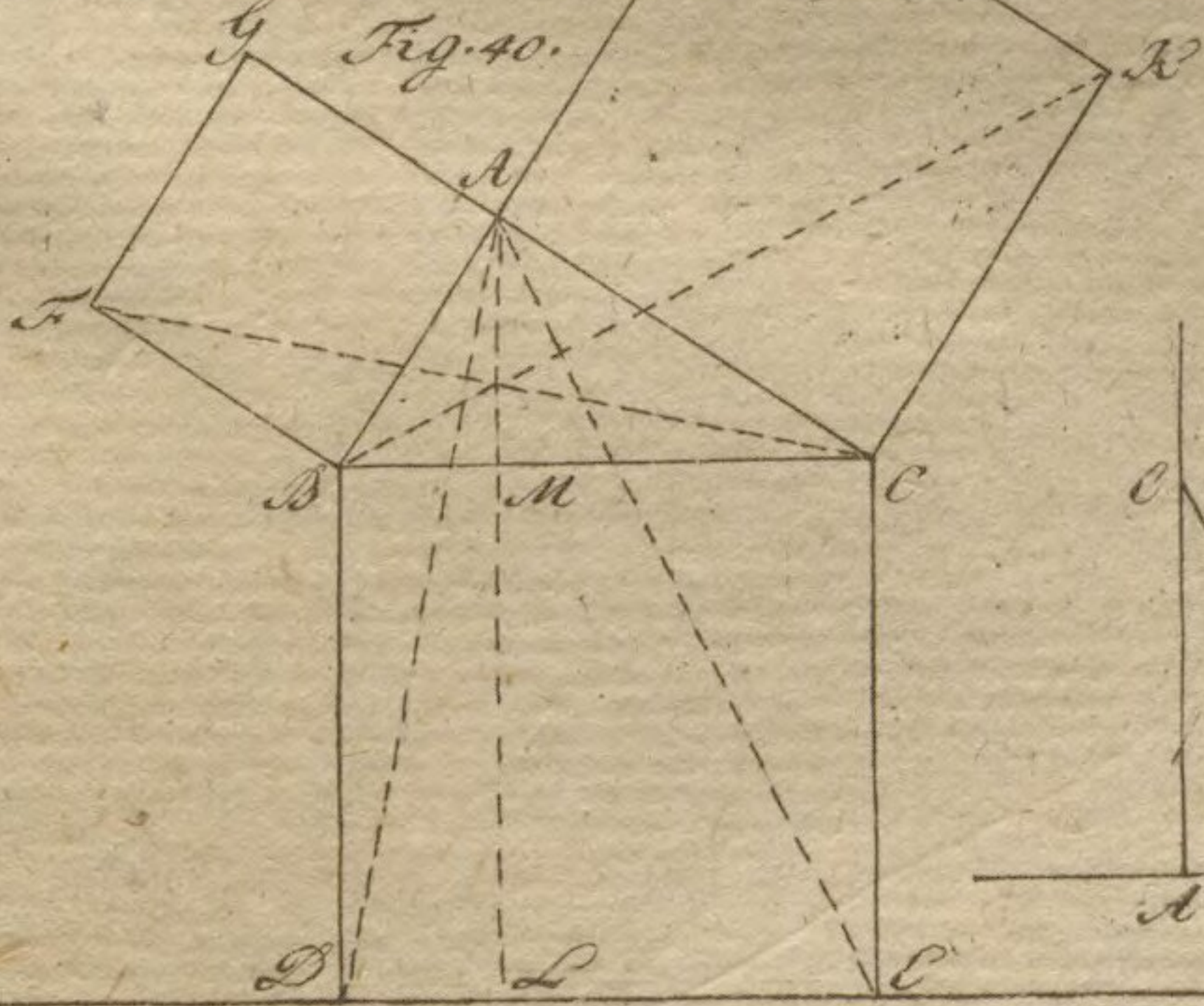
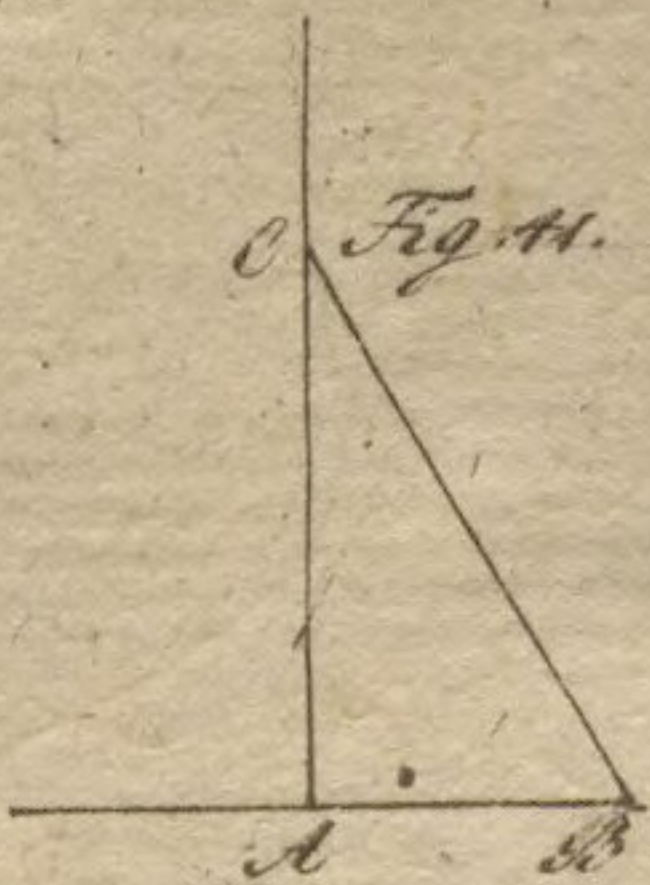
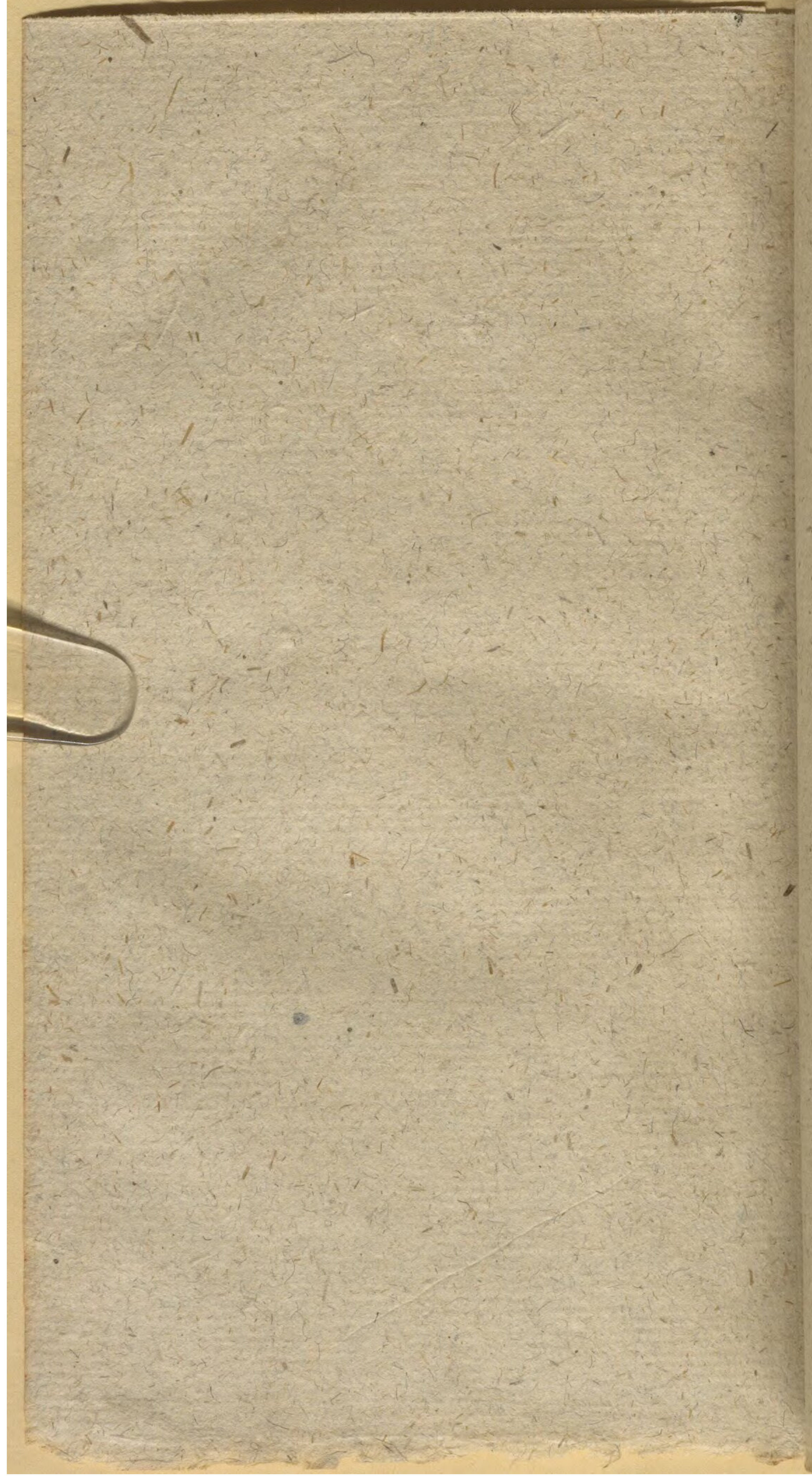
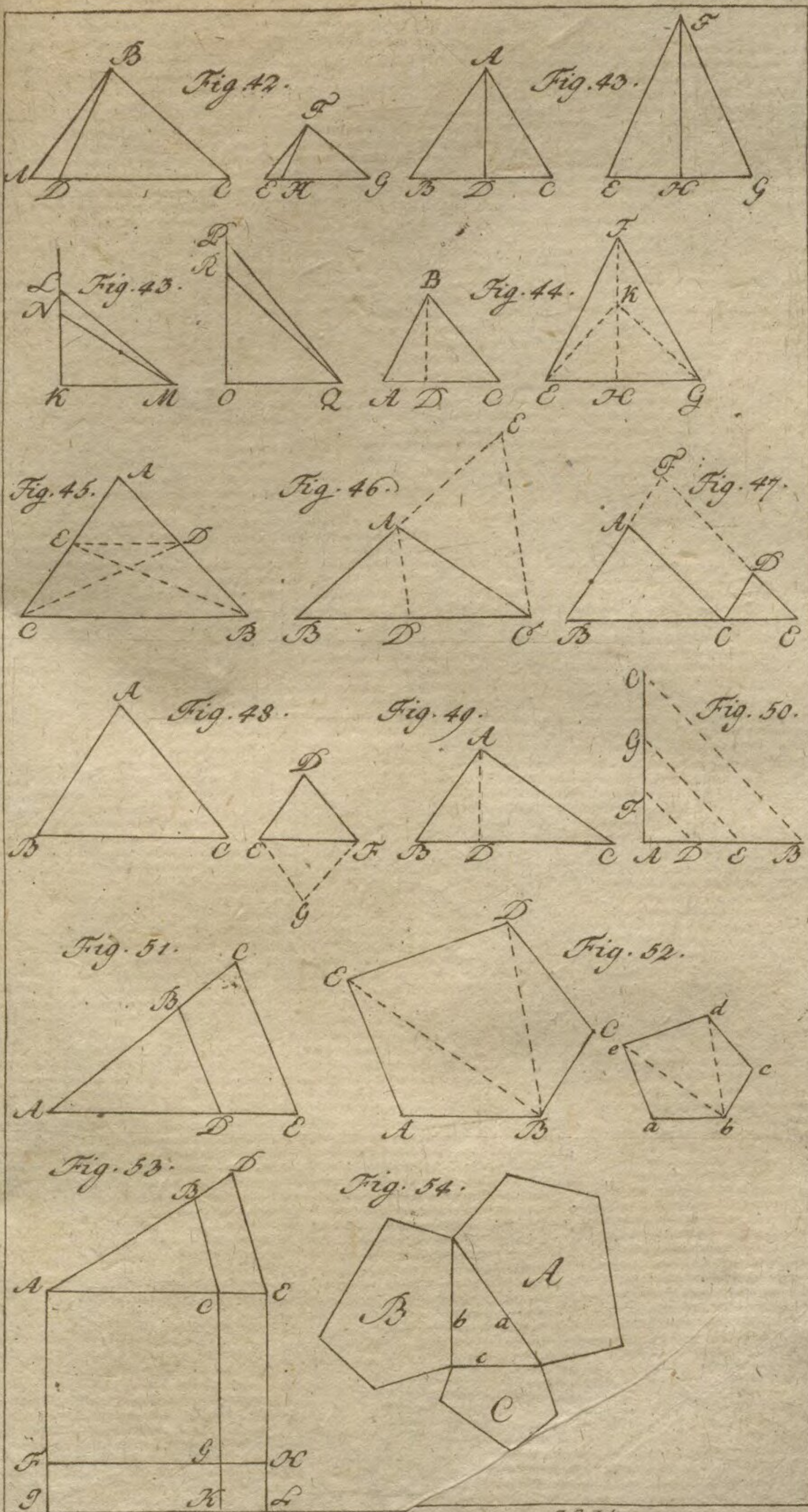
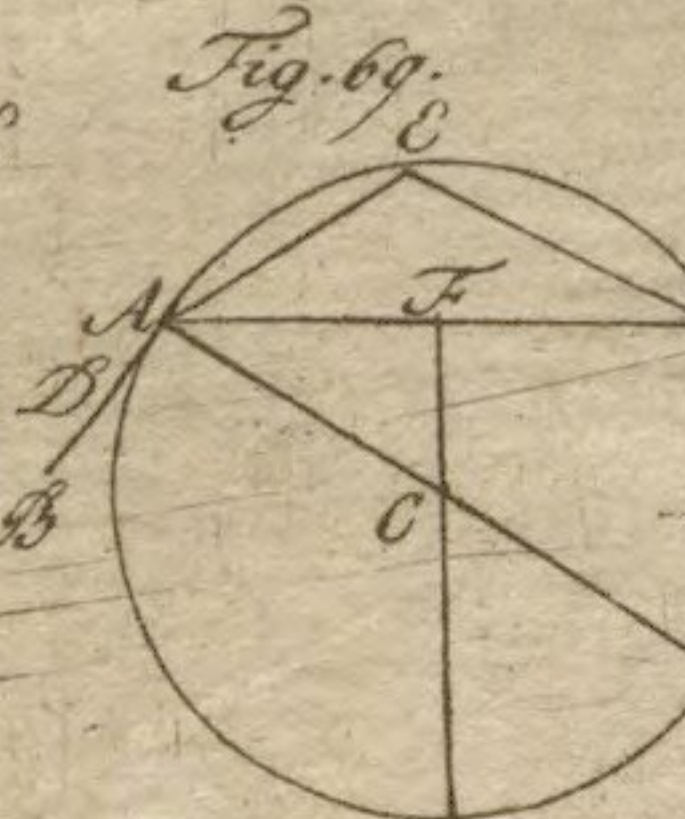
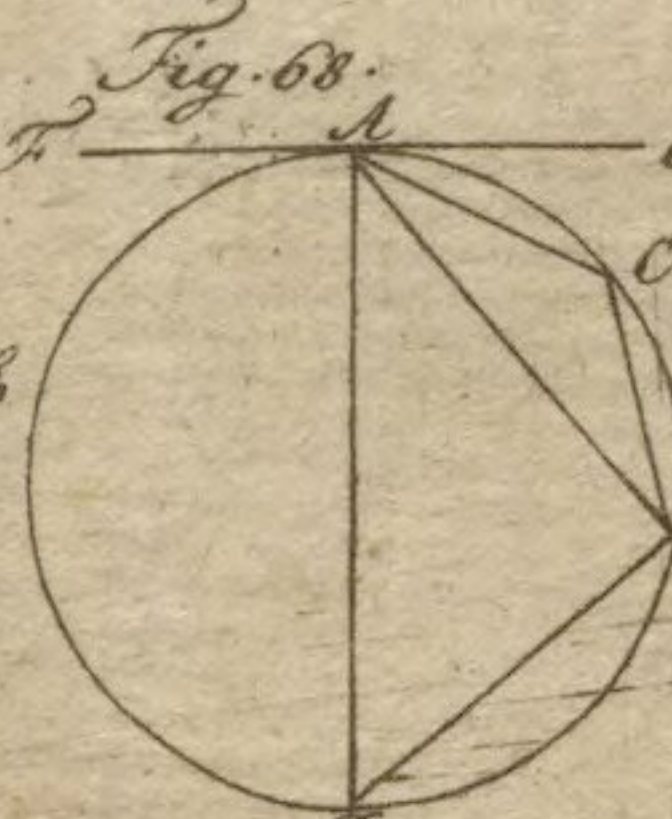
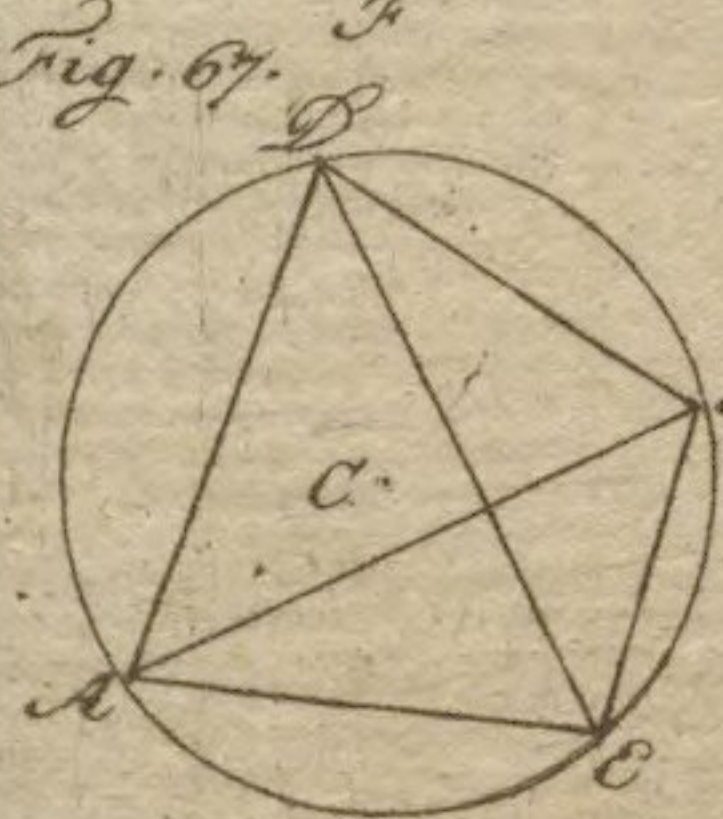
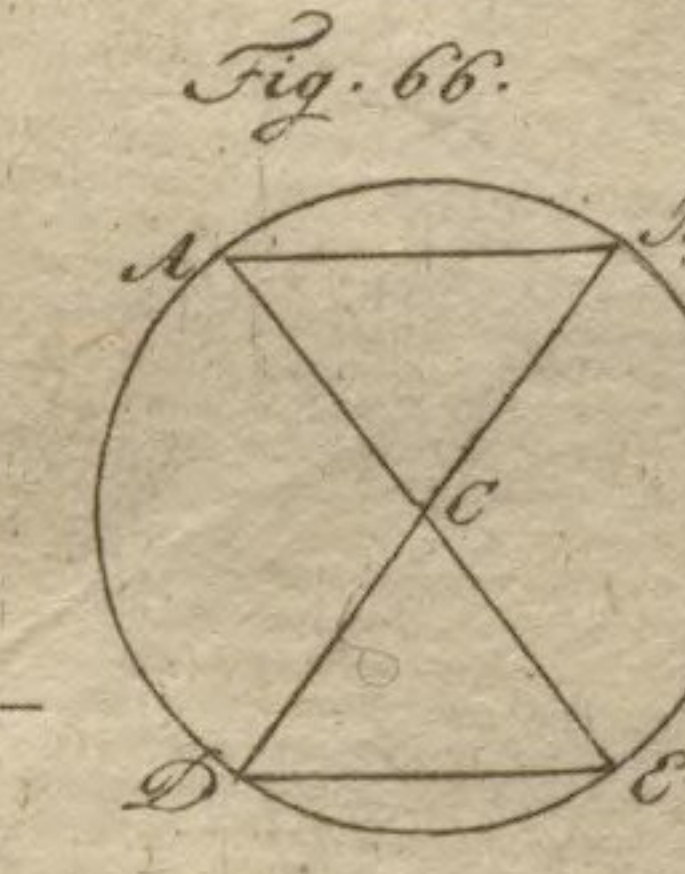
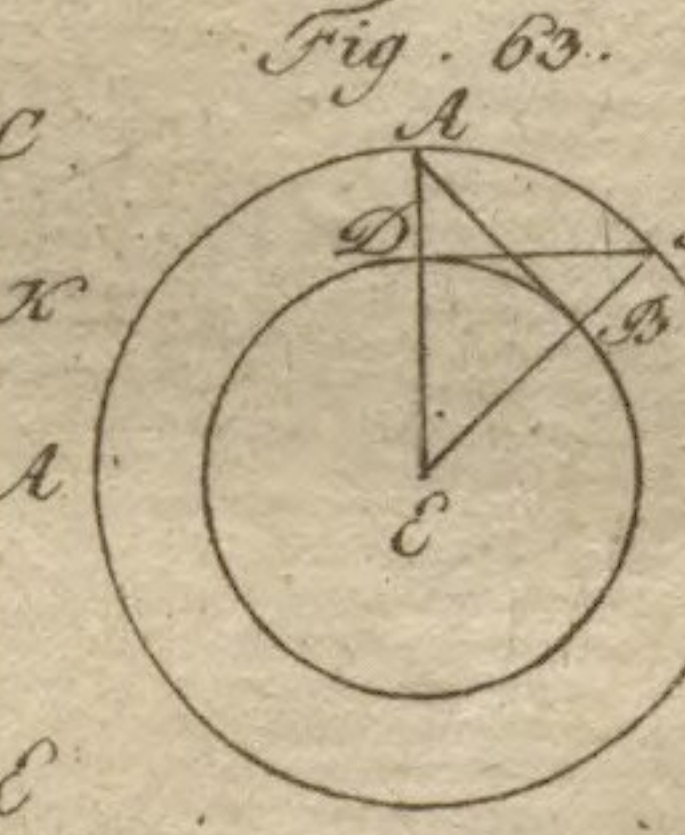
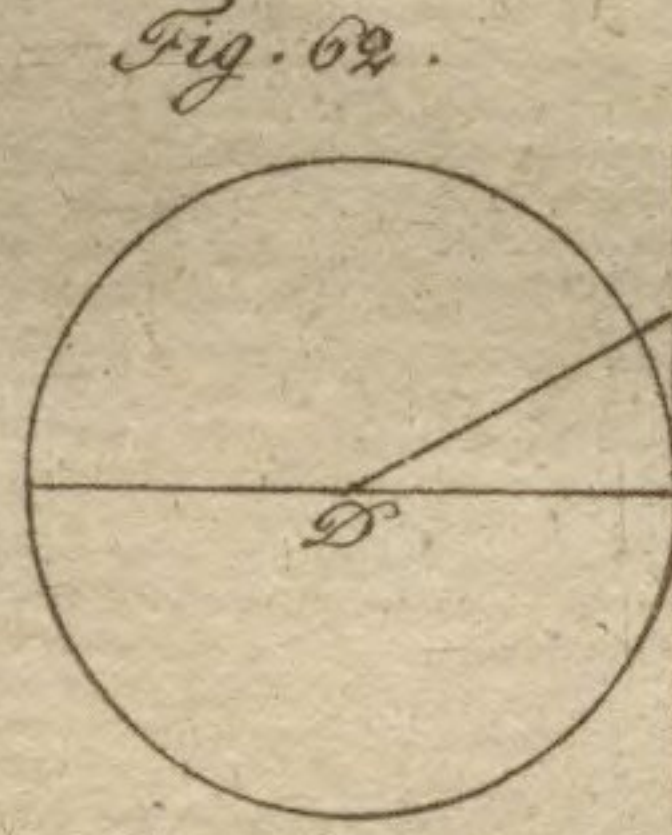
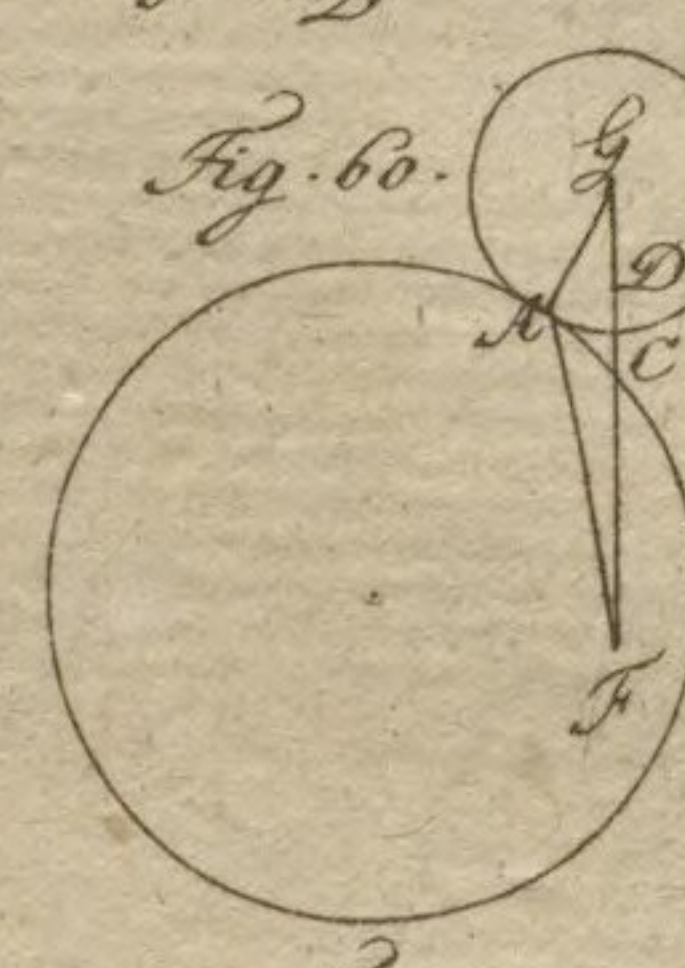
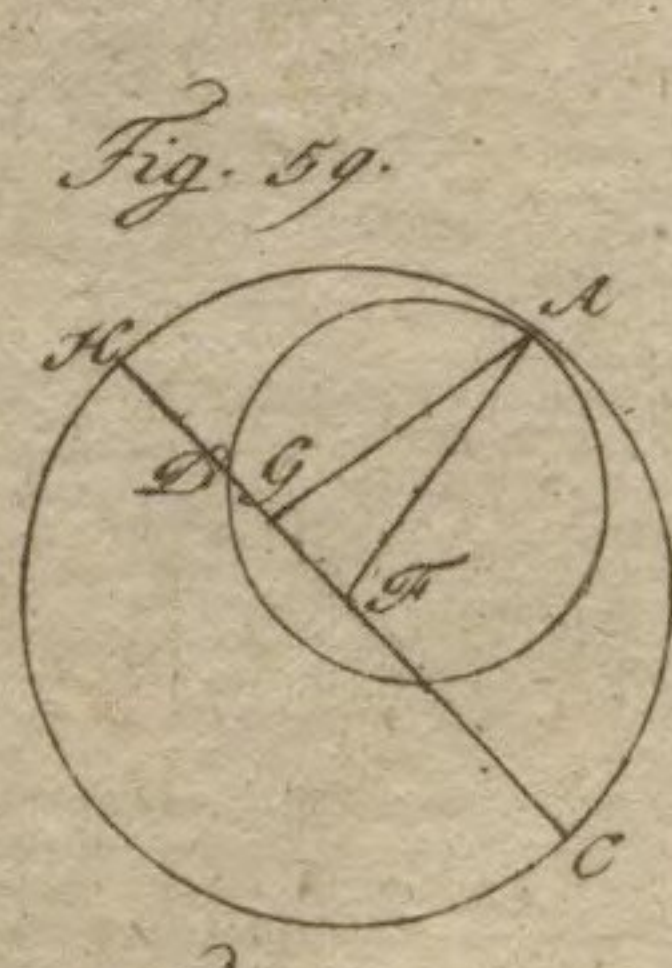
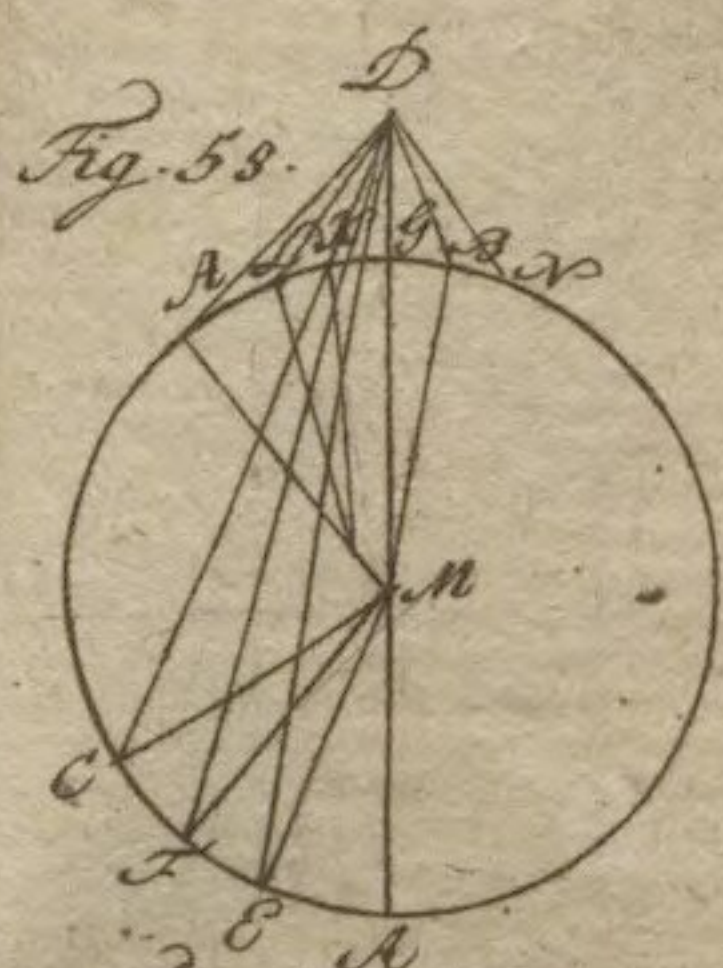
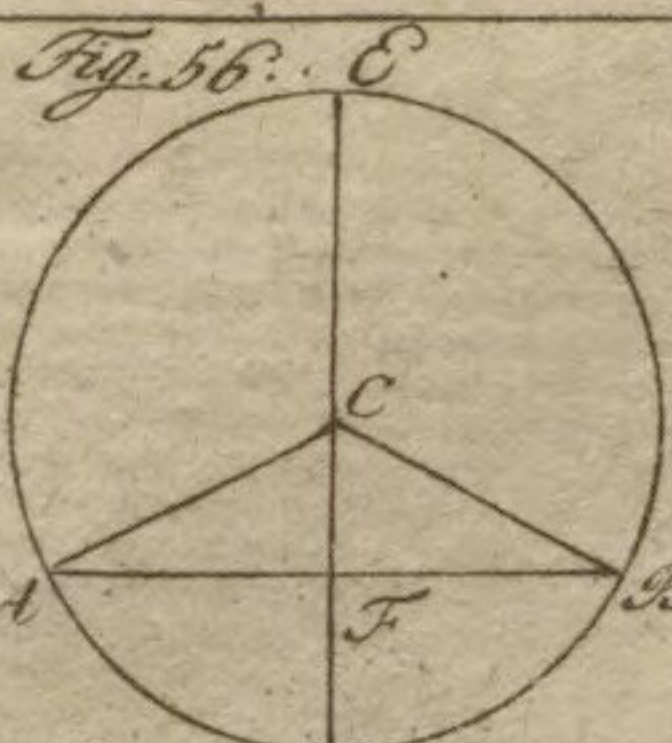
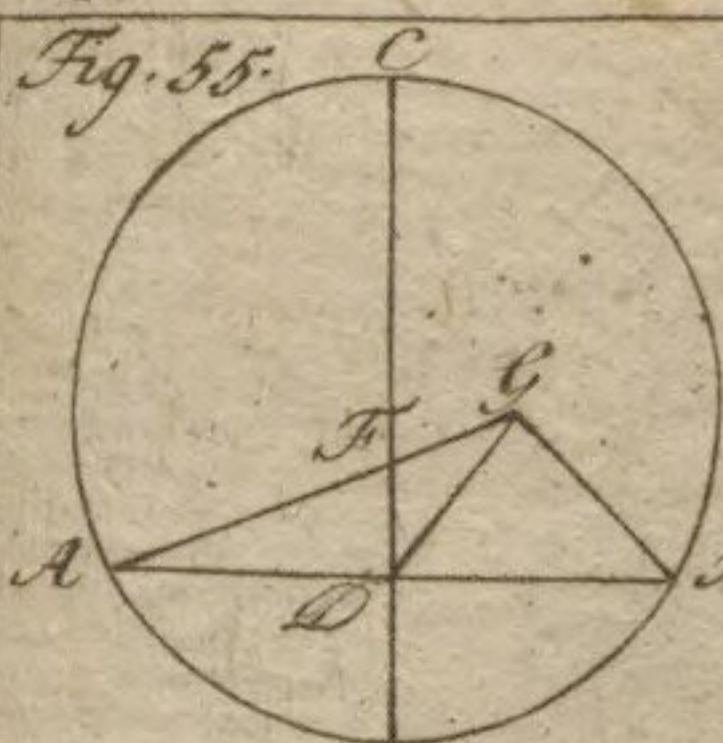


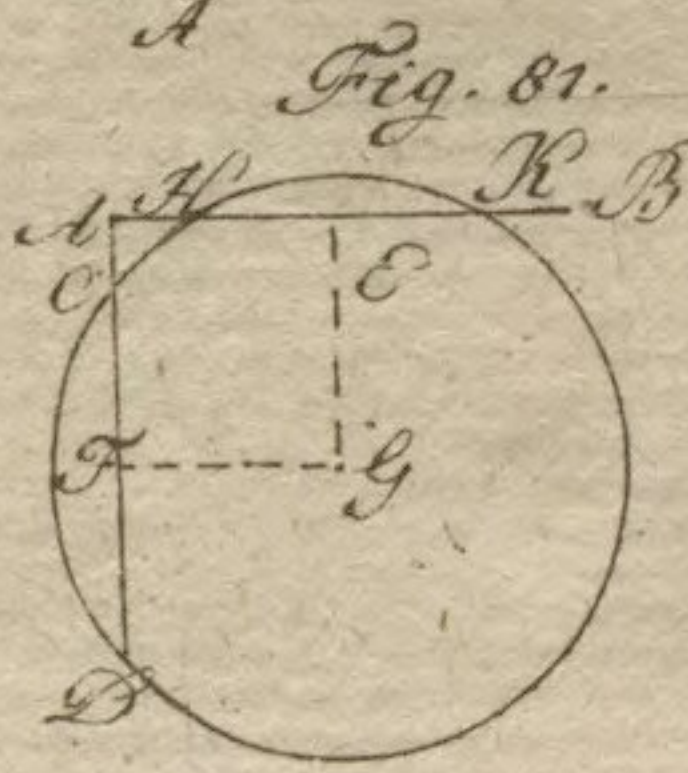
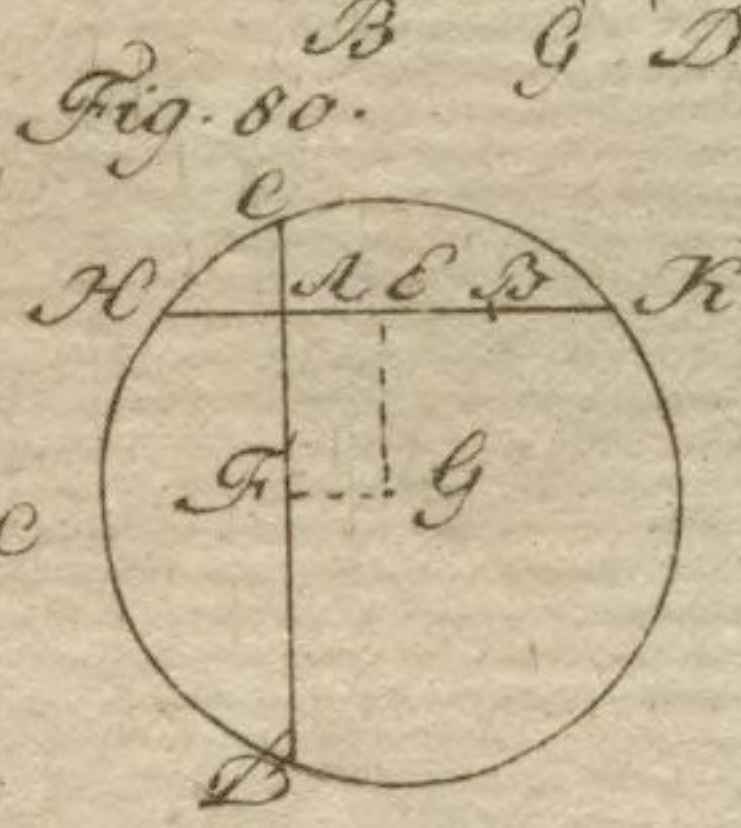
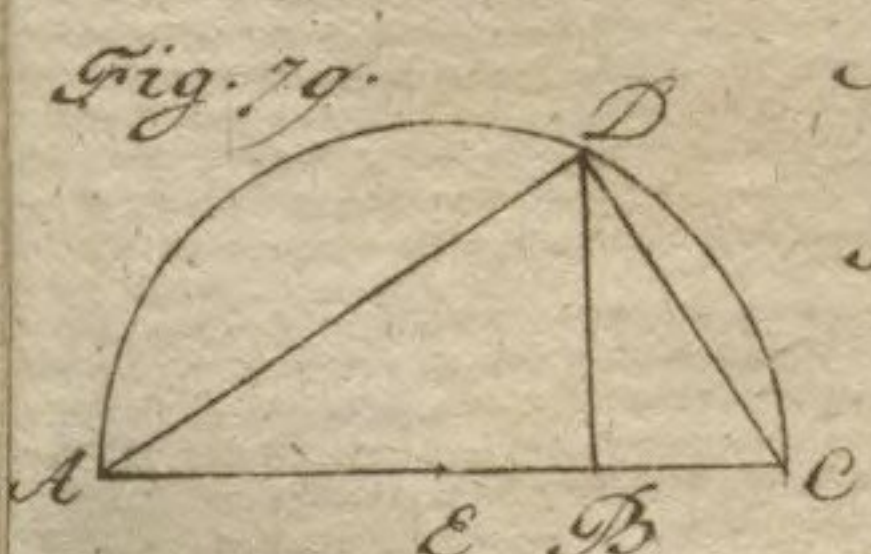
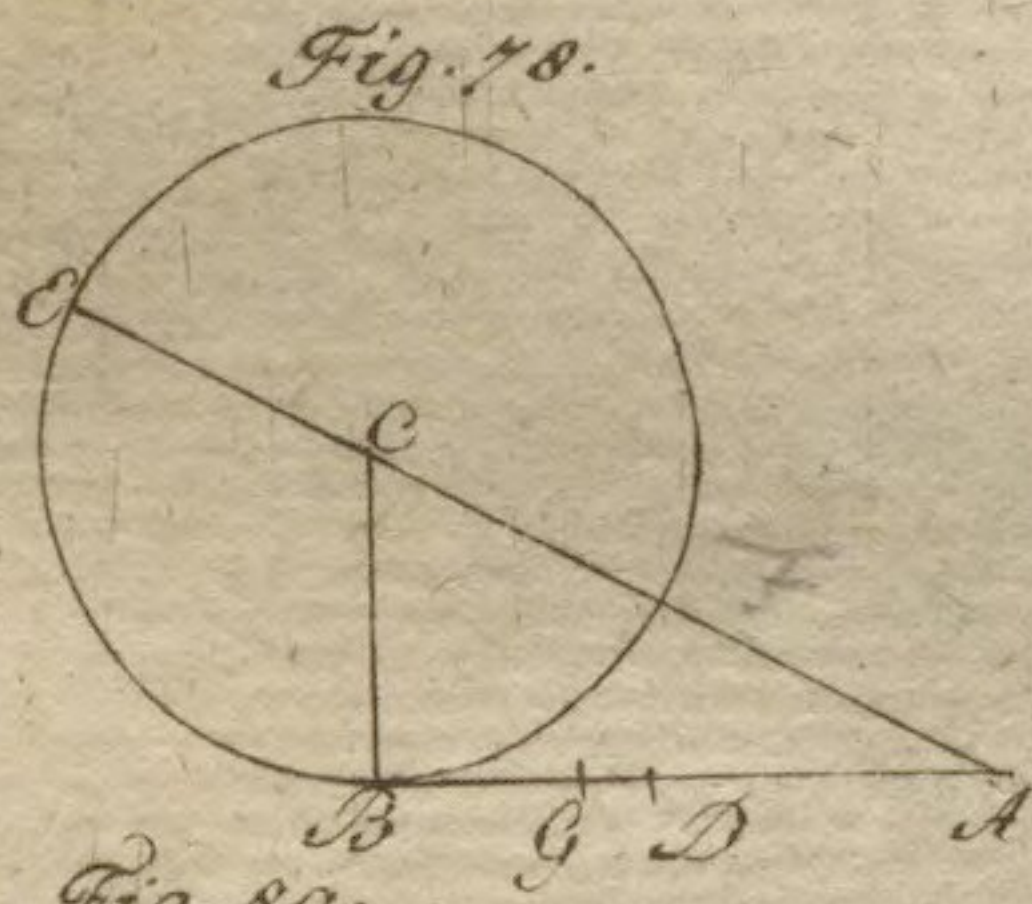
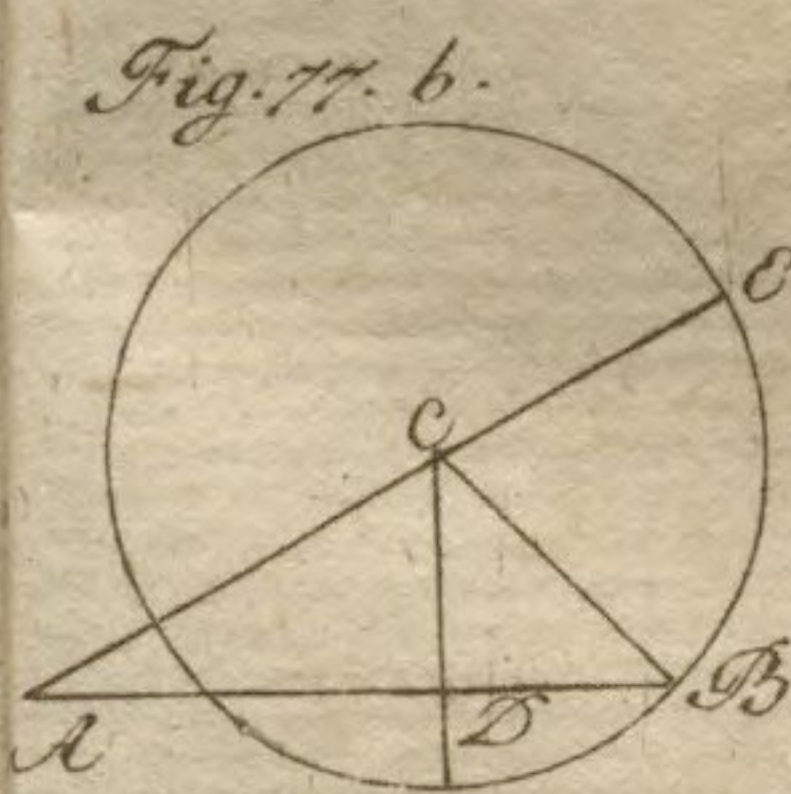
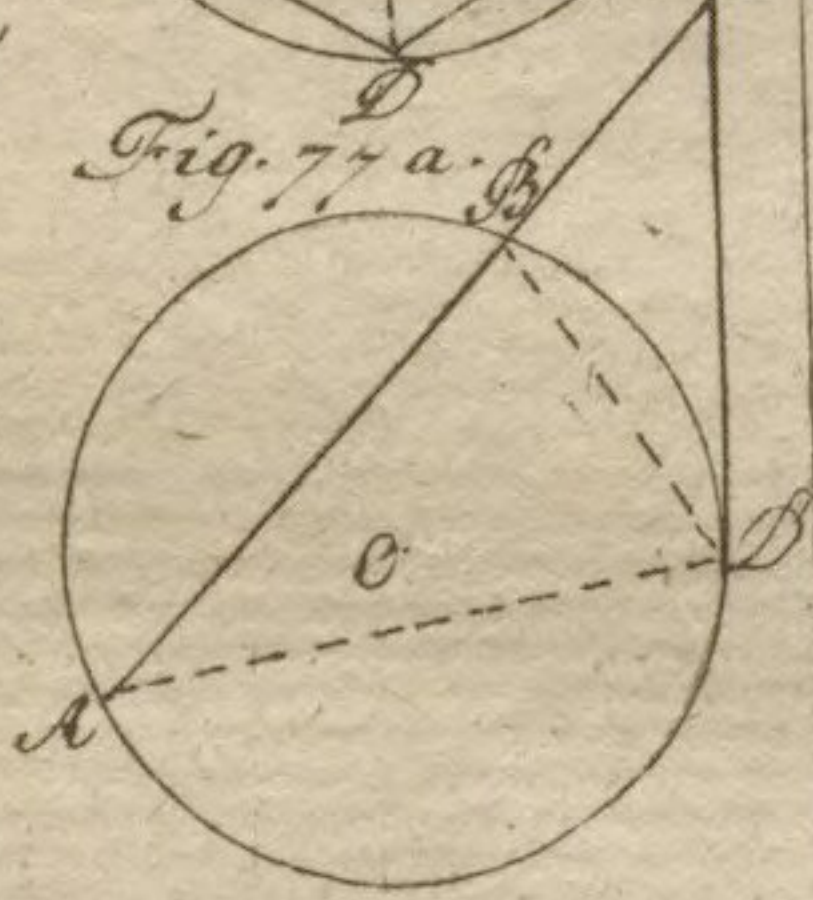
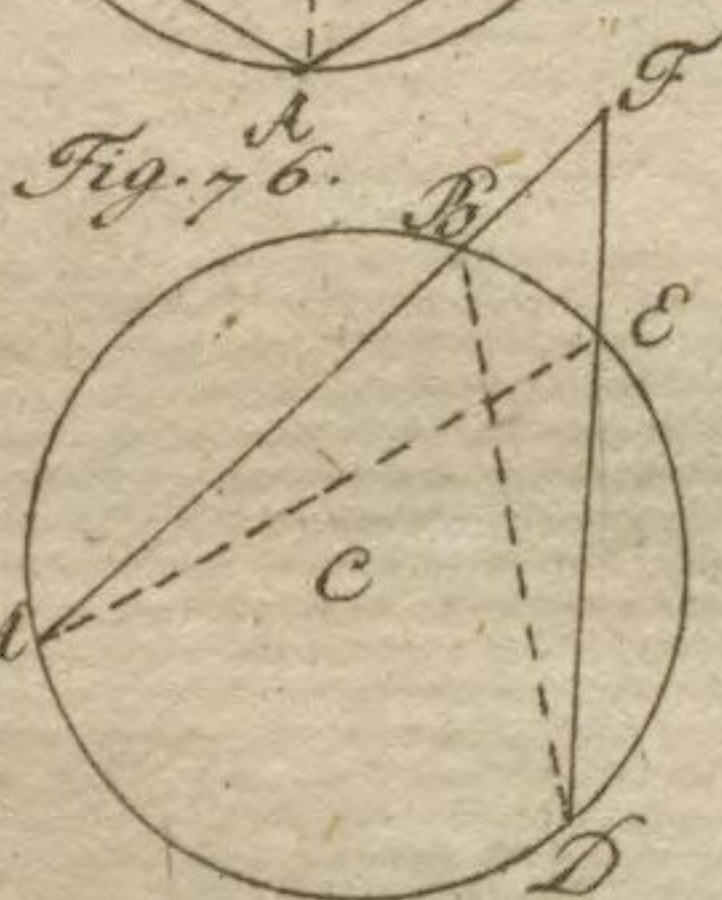
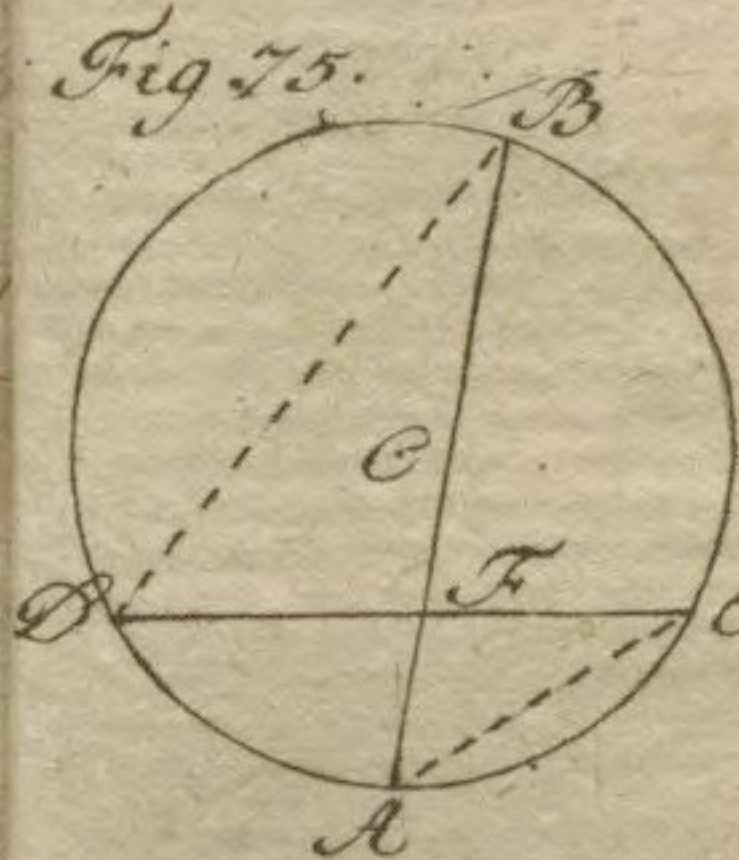
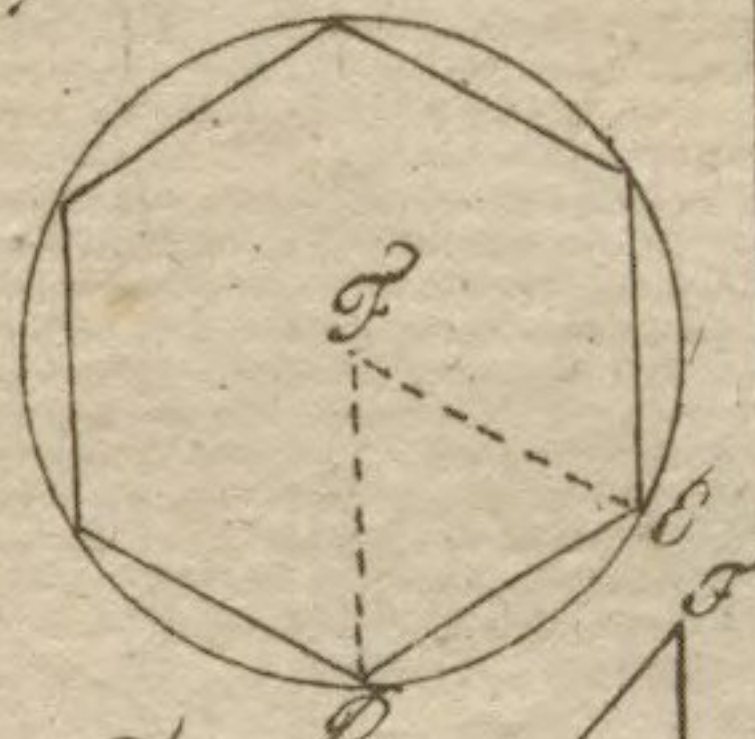
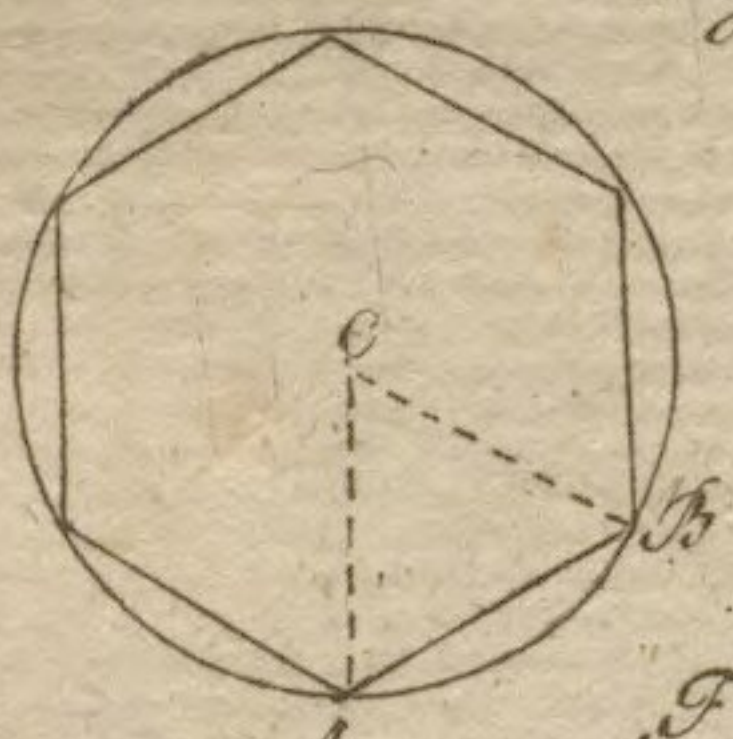
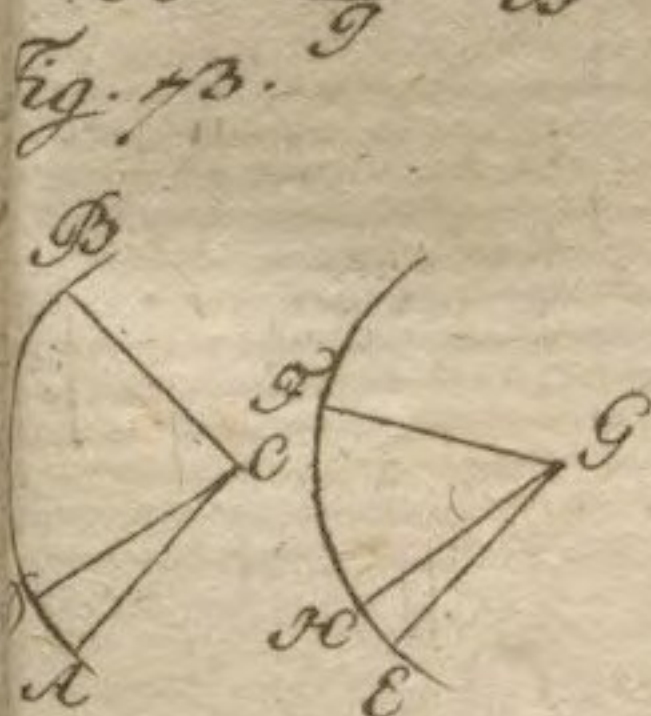
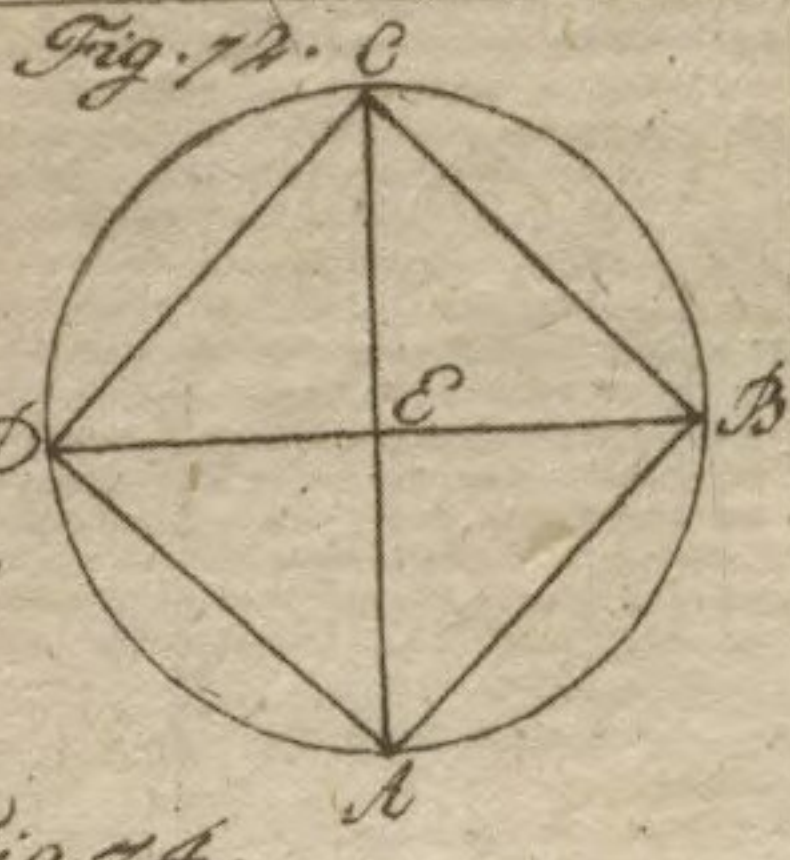
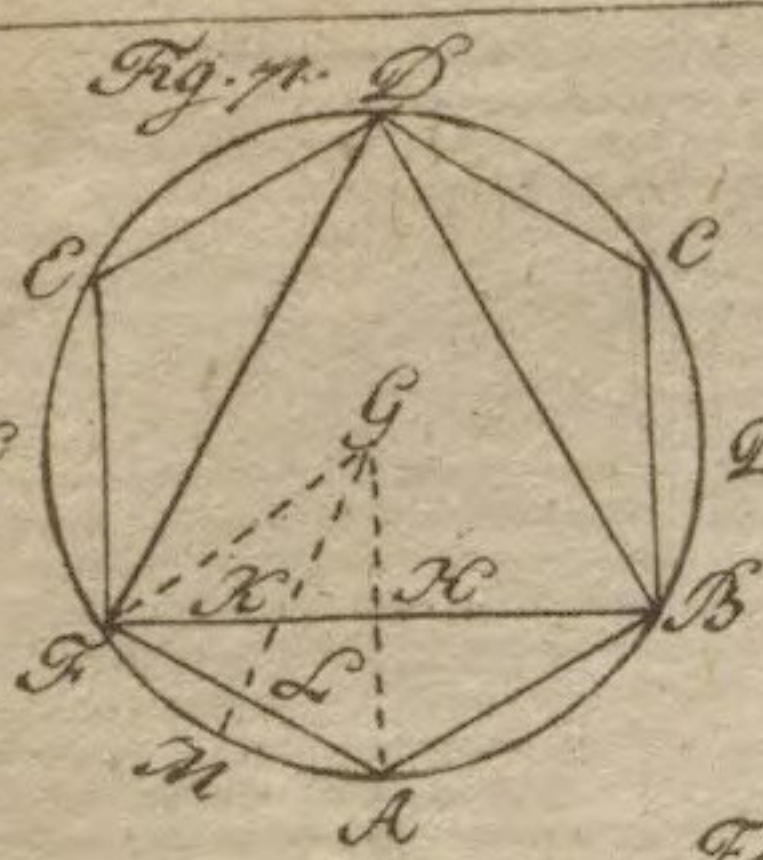
Fig. 41.

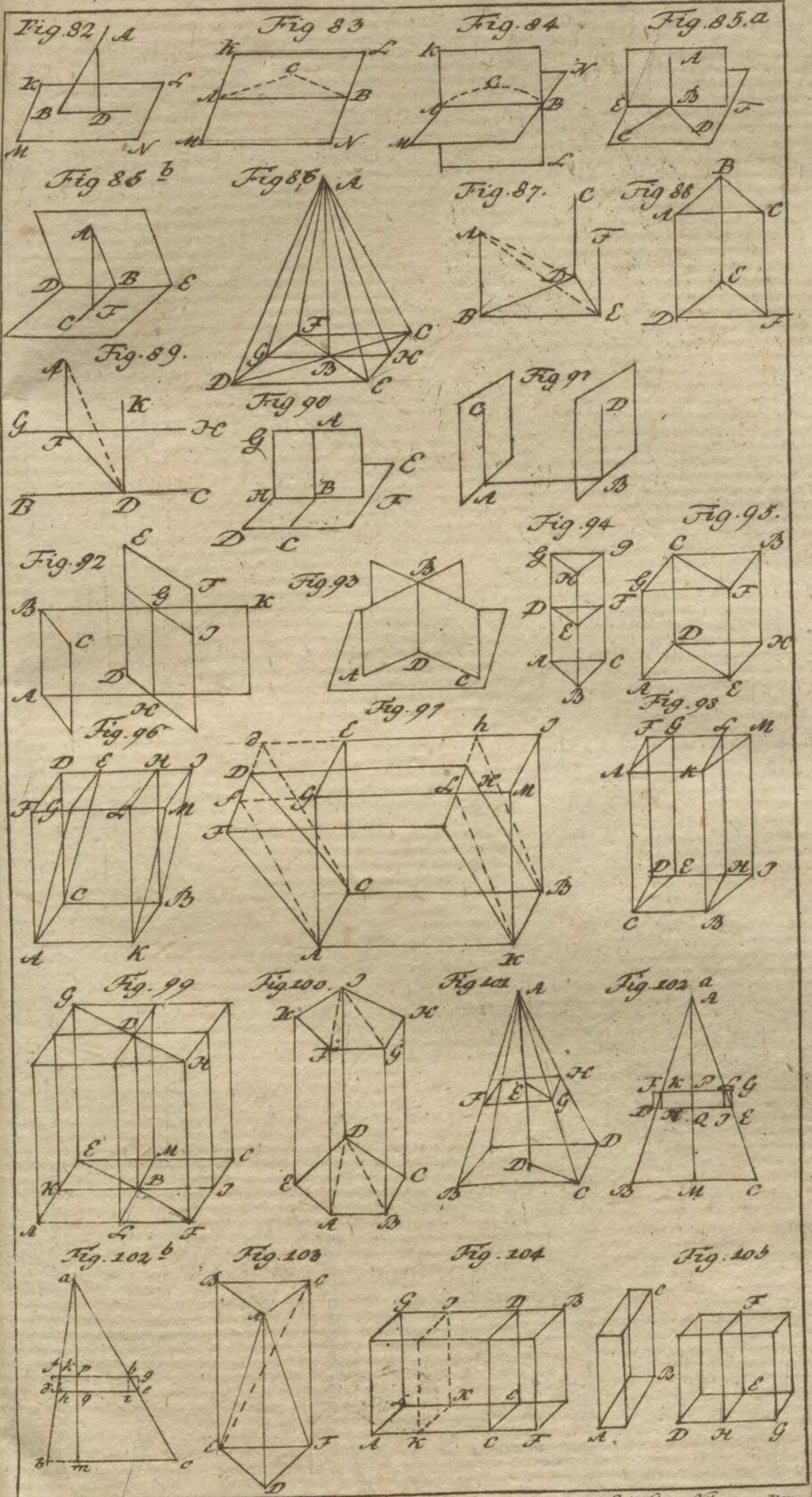


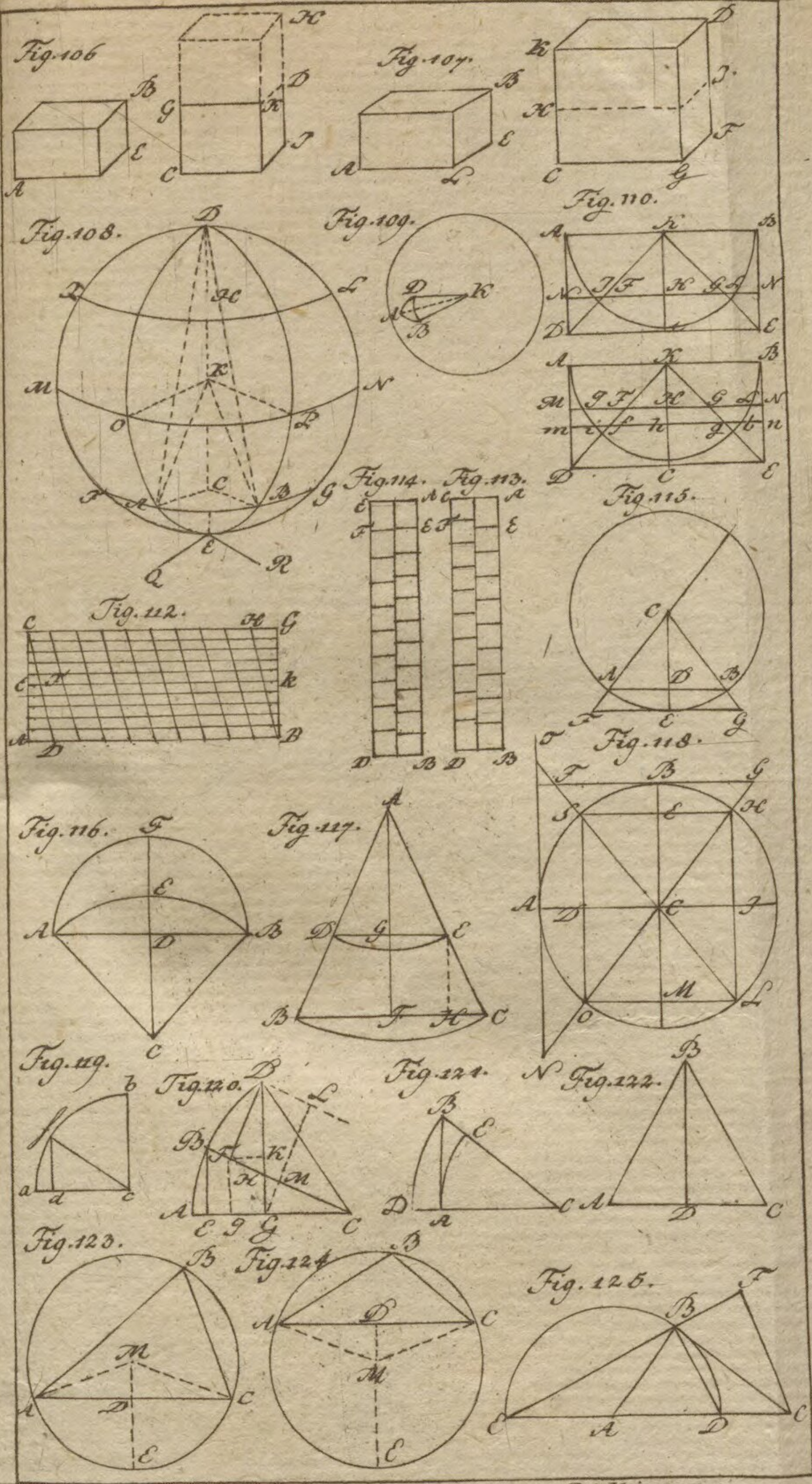


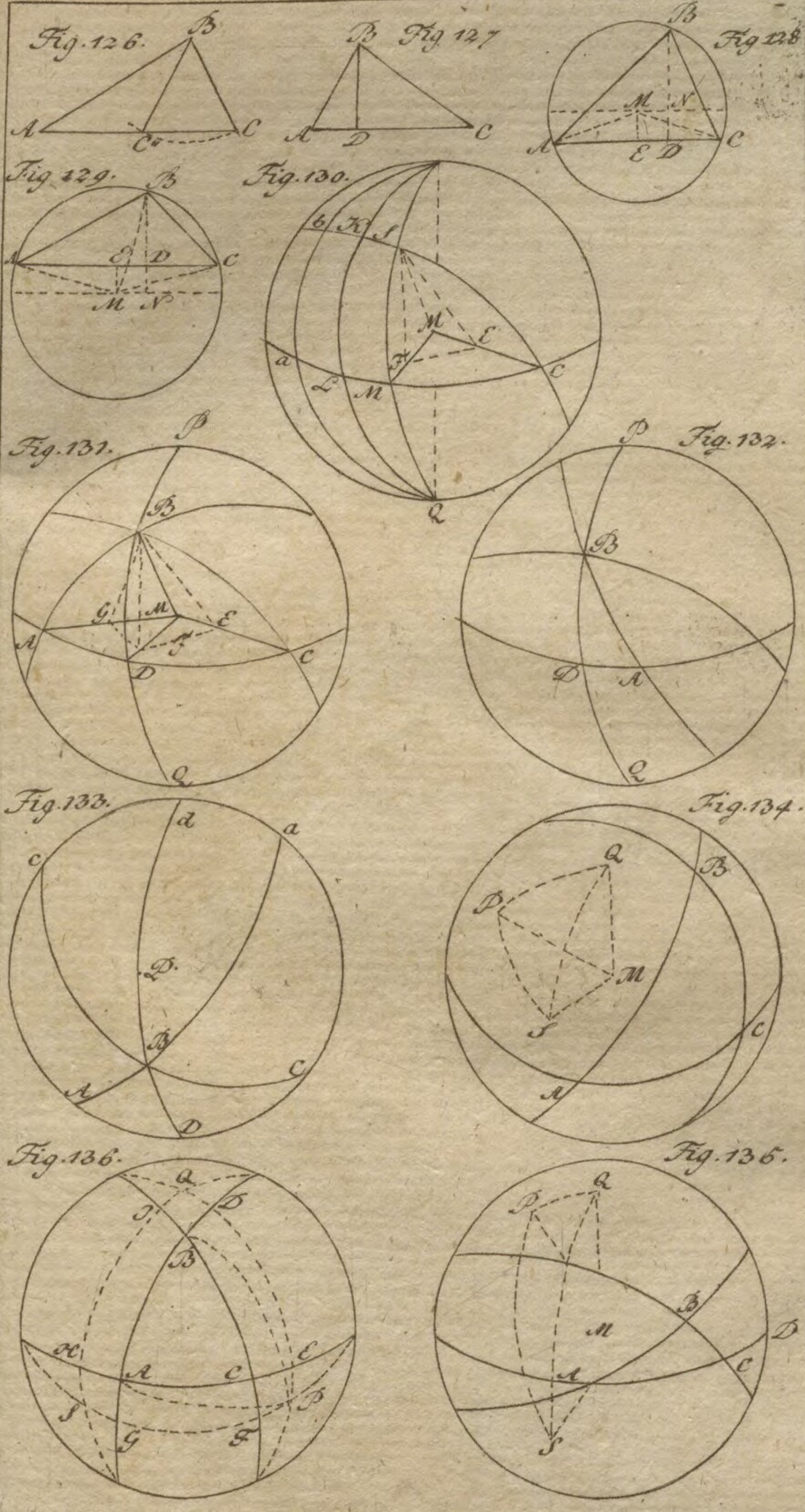












Vieth, Gerhard Ulrich Anton, 1763-1836

Anfangsgründe der Mathematik

Bd.: 1

Leipzig 1796

Math.u. 198-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594343-9

VD18 80052819-001